

Zur Ausgleichung im Gauß-Markov-Modell beim Übergang zwischen Beobachtungsräumen

On Adjustment in the Gauss-Markov Model at the Transition between Observation Spaces

Jörg Reinking

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird ein Verfahren aufgezeigt, mit dem die Ausgleichung im Gauß-Markov-Modell bei der Transformation der Beobachtungen zu einem alternativen Beobachtungsraum zutreffend ermöglicht wird. Dazu wird eine Lösung mittels Gauß-Newton-Iteration verwendet, die mit der Nutzung von Jacobi-Matrizen auskommt. Das stochastische Modell wird in jedem Iterationsschritt angepasst, sodass auch im alternativen Beobachtungsraum nicht-normalverteilte Beobachtungen korrekt ausgewertet werden können. Der Beitrag zeigt an zwei numerischen Beispielen das praktische Vorgehen und analysiert die jeweiligen Ergebnisse.

Schlüsselwörter: Ausgleichung, nicht-normalverteilt, Transformation, Anpassung, stochastisches Modell

Summary

This contribution presents a procedure that allows an accurate parameter estimation using the Gauss-Markov model when

the observations are transformed to an alternative observation space. For that, a solution based on a Gauss-Newton iteration is applied, which gets by with Jacobi matrices. In each iteration step the stochastic model is adapted so that also in the alternative observation space non-normally distributed observations can be correctly evaluated. The contribution shows the practical procedure using two numerical examples and analyses their results.

Keywords: *adjustment, non-normally distributed, transformation, adaptation, stochastic model*

1 Einleitung

In der Geodäsie wird in vielen Fällen die Bestimmung von unbekanntem Parametern aus Messwerten im Rahmen einer Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate (M.d.k.Q.) durchgeführt. In der Regel wird dazu der

funktionale Zusammenhang zwischen den ausgeglichenen Parametern und Beobachtungen durch Beobachtungsgleichungen dargestellt, die sowohl explizit als auch implizit vorliegen können. Dabei können alle expliziten Beobachtungsgleichungen leicht durch einfaches Umstellen in implizite Beobachtungsgleichungen umgewandelt werden. Häufig sind diese impliziten Beobachtungsgleichungen nichtlinear.

Bei der Ausgleichung nach der M.d.k.Q. werden in einem Beobachtungsraum, der durch die Beobachtungstypen aufgespannt wird, diejenigen ausgeglichenen Beobachtungen gesucht, für die die Gruppe der Residuen den maximalen Wert der Wahrscheinlichkeitsdichte erreicht und die gleichzeitig die Beobachtungsgleichungen erfüllen. Grundsätzlich wird dabei davon ausgegangen, dass die Beobachtungen und die Residuen normalverteilte Größen sind. Damit ergibt sich die bekannte, zu optimierende Zielfunktion

$$\Omega = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}, \tag{1.1}$$

die minimiert werden muss. Dabei stellt \mathbf{v} wie üblich den Residuenvektor dar und die Gewichtsmatrix \mathbf{P} repräsentiert als Inverse der Kovarianzmatrix das stochastische Modell der Beobachtungen.

Nicht selten ist es sinnvoll oder notwendig, die Beobachtungen in einen alternativen Beobachtungsraum zu transformieren und die Ausgleichung in diesem Beobachtungsraum durchzuführen. Dies kann z. B. dann vorteilhaft sein, wenn der funktionale Zusammenhang im alternativen Beobachtungsraum leichter beschreibbar ist. Im alternativen Beobachtungsraum muss dann die alternative Zielfunktion

$$\Omega_a = \mathbf{v}_a^T \mathbf{P}_a \mathbf{v}_a \tag{1.2}$$

optimiert werden. Dabei ergeben die Optimierungen der beiden Zielfunktionen nur dann identische Werte und Ergebnisse für die unbekannt Parameter, wenn der Übergang zwischen den Beobachtungsräumen sowohl für die Beobachtungen und ihre Residuen als auch für das stochastische Modell eindeutig ist. Daneben ist es für die Anwendbarkeit der M.d.k.Q. unabdingbar, dass auch die Beobachtungen im alternativen Beobachtungsraum normalverteilte Größen sind.

Ein häufig auftretender Fall ist der Übergang zwischen Beobachtungsräumen kartesischer und polarer Koordinaten. In Lösler (2020b) wurde dieser Fall beispielhaft für die Ausgleichung einer Regressionsparabel behandelt. Dabei ergaben sich allerdings zum Teil unterschiedliche Resultate für den ausgeglichenen Parabelparameter. Der Autor verwendet zur Lösung der nichtlinearen Ausgleichungsaufgabe eine sequenzielle quadratische Programmierung, die durch die Nutzung von Hesse-Matrizen eine schnellere Lösung als bei Anwendung der meist üblichen Gauß-Newton-Iteration nur über die Jacobi-Matrizen verspricht. Dennoch muss auch eine Gauß-Newton-Iteration

mit identischen Näherungswerten für die auszugleichenden Parameter identische Ergebnisse liefern, solange die Grundvoraussetzung der normalverteilten Beobachtungen eingehalten wird, da damit zumindest zum gleichen lokalen Optimum der Zielfunktionen iteriert wird.

In diesem Beitrag soll gezeigt werden, wie im Rahmen einer Ausgleichung mit Gauß-Newton-Iteration dafür gesorgt werden kann, dass die Optimierung der Zielfunktion sowohl im ursprünglichen als auch im alternativen Beobachtungsraum identische ausgeglichene Parameter liefert. Dazu wird zunächst in Abschnitt 2 die Ausgleichung impliziter Beobachtungsgleichungen im Gauß-Markov-Modell dargestellt und untersucht, unter welchen Umständen im alternativen Beobachtungsraum unterschiedliche ausgeglichene Parameter zu erwarten sind. In Abschnitt 3 wird angegeben, wie im Zuge der Gauß-Newton-Iteration sowohl für implizite als auch für explizite Beobachtungsgleichungen eine korrekte Ausgleichung erfolgen kann. Der vierte Abschnitt stellt an zwei Beispielen das numerische Vorgehen dar. Im letzten Abschnitt werden die Ergebnisse zusammengefasst und gewürdigt.

2 Ausgleichung impliziter Beobachtungsgleichungen

Für die Analyse impliziter Beobachtungsgleichungen im Gauß-Markov-Modell wird auf die Darstellung in Reinking (2008) zurückgegriffen. Dabei wird von im ursprünglichen Beobachtungsraum normalverteilten Beobachtungen ausgegangen, sodass die M.d.k.Q. eine optimale Lösung im Sinne einer maximalen Wahrscheinlichkeit ergibt, wenn die Zielfunktion in (1.1) minimiert ist. Die m Beobachtungsgleichungen seien implizit gegeben mit

$$g_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{l}}) = 0; \quad i = 1, \dots, m. \tag{2.1}$$

Dabei stellen $\hat{\mathbf{x}}$ und $\hat{\mathbf{l}}$ die ausgeglichenen Vektoren der Parameter bzw. Beobachtungen dar. Eine Linearisierung mit den Näherungswerten der Parameter \mathbf{x}_0 und Beobachtungen \mathbf{l}_0 führt zu linearisierten impliziten Beobachtungsgleichungen, die iterativ zu lösen sind:

$$g_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{l}_0) + \sum_{j=1}^u \frac{\partial g_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{l}_0)}{\partial x_j} dx_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{l}_0)}{\partial l_k} dl_k = 0 \tag{2.2}$$

mit u als Anzahl der Parameter und n als Anzahl der Beobachtungen. Die Gesamtheit aller m Beobachtungsgleichungen kann mit den Jacobi-Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{F} angegeben werden zu

$$\mathbf{g}_0 + \mathbf{A} \mathbf{d} \mathbf{x} + \mathbf{F} \mathbf{d} \mathbf{l} = 0, \tag{2.3}$$

mit $\mathbf{d} \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0$ und $\mathbf{d} \mathbf{l} = \hat{\mathbf{l}} - \mathbf{l}_0$ und

$$\mathbf{g}_0 = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{l}_0) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{l}_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{l}_0)}{\partial x_u} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{g}_m(\mathbf{x}_0, \mathbf{l}_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{g}_m(\mathbf{x}_0, \mathbf{l}_0)}{\partial x_u} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{l}_0)}{\partial l_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{l}_0)}{\partial l_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{g}_m(\mathbf{x}_0, \mathbf{l}_0)}{\partial l_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{g}_m(\mathbf{x}_0, \mathbf{l}_0)}{\partial l_n} \end{bmatrix}.$$

Da in jeder Iterationsstufe die ausgeglichenen Beobachtungen und ihre Näherungswerte aus den Beobachtungen und den Residuen der vorhergehenden Iterationsstufe bestimmt werden, wird der Vektor \mathbf{dl} immer ein Nullvektor. Die Ausgleichung kann daher nur durchgeführt werden, wenn seine Zerlegung in Beobachtung, Residuen und Näherungswerte genutzt wird

$$\mathbf{g}_0 + \mathbf{A}\mathbf{dx} + \mathbf{F}(\mathbf{1} + \mathbf{v} - \mathbf{l}_0) = \mathbf{A}\mathbf{dx} - (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0 + \mathbf{v}_z) = 0. \quad (2.4)$$

Die Produkte der Jacobi-Matrix \mathbf{F} mit den Vektoren wurde hier bereits zusammengefasst mit

$$\mathbf{z} = -\mathbf{F}\mathbf{l}, \quad \mathbf{z}_0 = \mathbf{g}_0 - \mathbf{F}\mathbf{l}_0, \quad \mathbf{v}_z = -\mathbf{F}\mathbf{v}. \quad (2.5)$$

Die abgeleiteten Beobachtungen \mathbf{z} sind lineare Funktionen der normalverteilten Beobachtungen und damit ebenfalls normalverteilt. Die Zielfunktion erreicht ein Minimum für die Lösung

$$\mathbf{dx} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_z \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_z (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0), \quad (2.6)$$

wobei die Gewichtsmatrix \mathbf{P}_z aus der Varianzfortpflanzung für lineare Funktionen (Niemeier 2008) bestimmt wird zu

$$\mathbf{P}_z = \mathbf{Q}_z^{-1} = (\mathbf{F}\mathbf{Q}\mathbf{F}^T)^{-1} = (\mathbf{F}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{F}^T)^{-1}. \quad (2.7)$$

Für die Iteration müssen noch die Residuen bestimmt werden, die sich aus einem Vergleich ergeben

$$\mathbf{v} = -\mathbf{Q}\mathbf{F}^T \mathbf{P}_z \mathbf{v}_z. \quad (2.8)$$

In Reinking (2008) wurde gezeigt, dass für reguläre Probleme die Zielfunktionen für die ursprünglichen und abgeleiteten Beobachtungen identische Werte ergeben müssen.

Es wird nun angenommen, dass ein Wechsel des Beobachtungsraumes durchgeführt werden soll. Die k Beobachtungen im alternativen Beobachtungsraum \mathbf{l}_a sollen dabei aus Transformationsfunktionen τ der Beobachtungen im ursprünglichen Beobachtungsraum resultieren

$$\mathbf{l}_a = \tau(\mathbf{l}). \quad (2.9)$$

Es sei erwähnt, dass n und k nicht notwendig identisch sein müssen. Mit \mathbf{l}_a ergeben sich ebenfalls alternative implizite Beobachtungsgleichungen, die nicht zwangsläufig die identischen unbekannt Parameter des ursprünglichen Beobachtungsraumes enthalten müssen. Zur Vereinfachung wird hier aber zunächst davon ausgegangen, dass dem so sei

$$\mathbf{g}_{a,i}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{l}}_a) = 0. \quad (2.10)$$

In linearisierter Form erhält man jetzt

$$\mathbf{g}_{a,0} + \mathbf{A}_a \mathbf{dx} + \mathbf{F}_a \mathbf{dl}_a = 0. \quad (2.11)$$

Die Lösung ergibt sich entsprechend der obigen Darstellung zu

$$\mathbf{dx} = (\mathbf{A}_a^T \mathbf{P}_{z_a} \mathbf{A}_a)^{-1} \mathbf{A}_a^T \mathbf{P}_{z_a} (\mathbf{z}_a - \mathbf{z}_{a,0}), \quad (2.12)$$

mit

$$\mathbf{z}_a = -\mathbf{F}_a \mathbf{l}_a, \quad \mathbf{z}_{a,0} = \mathbf{g}_{a,0} - \mathbf{F}_a \mathbf{l}_{a,0}, \quad \mathbf{v}_{z_a} = -\mathbf{F}_a \mathbf{v}_a. \quad (2.13)$$

Hierbei sind die Jacobi-Matrizen entsprechend für die alternativen Beobachtungsgleichungen zu bilden. Für die Gewichtsmatrix \mathbf{P}_{z_a} wird jetzt allerdings die Gewichtsmatrix der Beobachtungen im alternativen Beobachtungsraum \mathbf{P}_a benötigt:

$$\mathbf{P}_{z_a} = \mathbf{Q}_{z_a}^{-1} = (\mathbf{F}_a \mathbf{Q}_a \mathbf{F}_a^T)^{-1} = (\mathbf{F}_a \mathbf{P}_a^{-1} \mathbf{F}_a^T)^{-1}. \quad (2.14)$$

Zur Bestimmung dieser Gewichtsmatrix wird in Lösler (2020b) das typische Vorgehen für nichtlineare Funktionen vorgeschlagen, bei dem die nichtlinearen Transformationsgleichungen linearisiert werden (Niemeier 2008)

$$\mathbf{dl}_a = \mathbf{T}\mathbf{dl}, \quad (2.15)$$

mit \mathbf{T} als Jacobi-Matrix der Transformationsgleichungen. Damit ergibt sich

$$\mathbf{P}_a = (\mathbf{T}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{T}^T)^{-1}. \quad (2.16)$$

Diese Darstellung ist allerdings nur im Differentiellen gültig, im Finiten kann sie nur in mehr oder weniger guter Näherung gelten. Im Kern von (2.16) wird im Prinzip ein Hyperellipsoid der Kovarianzmatrix durch Skalierung der Achsen und Rotation in den alternativen Beobachtungsraum überführt. Dadurch erweckt die Symmetrie der Gewichtsmatrix den Eindruck, dass die Kovarianzmatrix im alternativen Beobachtungsraum zu einer multivariaten Normalverteilung gehört. Auch dies ist für nichtlineare Transformationen zwischen den Beobachtungsräumen meist nur in Näherung der Fall und gilt nicht allgemein. Damit kann die Zielfunktion in (1.2) nicht mit (2.16) angewendet werden, um eine optimale Lösung im Sinne einer maximalen Wahrscheinlichkeit zu erreichen.

Gleichung (2.12) kann also nicht eine Lösung nach der M.d.k.Q. erzeugen.

Anschaulich lässt sich dieser Sachverhalt darstellen, wenn für die zusammengehörigen Beobachtungen einer impliziten Beobachtungsgleichung die Wahrscheinlichkeitsdichte berechnet wird. Geht man davon aus, dass diese Beobachtungen normalverteilt sind, dann lässt sich die Wahrscheinlichkeitsdichte für die an einer impliziten Beobachtungsgleichung beteiligten Beobachtungen I_i ausdrücken mit

$$\varphi_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{P}_i) = \varphi_i(\mathbf{0}, \mathbf{P}_i) \omega_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{P}_i), \tag{2.17}$$

wobei davon ausgegangen wird, dass diese Beobachtungen nicht mit anderen, zu weiteren impliziten Beobachtungsgleichungen gehörigen Beobachtungen korrelieren. Der erste Faktor auf der rechten Gleichungsseite beschreibt die Wahrscheinlichkeitsdichte am jeweiligen Ort I_i im Beobachtungsraum unter Berücksichtigung der zugehörigen Kovarianzmatrix. Der zweite Faktor enthält den exponentiellen Anteil im Abstand \mathbf{v}_i von diesem Ort

$$\omega_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{P}_i) = \exp(-0,5 \cdot \mathbf{v}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{v}_i). \tag{2.18}$$

Da dieser Anteil am jeweiligen Ort I_i zu 1 wird, kann er genutzt werden, um die Struktur der Wahrscheinlichkeitsdichte und damit den Konfidenzbereich grafisch darzustellen. Die gesamte Wahrscheinlichkeitsdichte ergibt sich aus allen Produkten der anteiligen Wahrscheinlichkeitsdichte aus (2.17) aller impliziten Beobachtungsgleichungen.

Zur Veranschaulichung wird auf das in Lösler (2020b) angegebene Beispiel zurückgegriffen. Gegeben sind dort die beobachteten kartesischen Koordinaten zweier Punkte, durch die eine Regressionsparabel optimal gelegt werden soll. Im kartesischen Beobachtungsraum liegen damit die in Tab. 1 angegebenen Beobachtungen vor.

Zur besseren Illustration werden die Standardabweichungen angepasst. Die zugehörige Kovarianzmatrix für die Punkte sei hier angenommen zu

$$\sum_{c,i} = \text{diag}(1 \quad 0,1^2), \tag{2.19}$$

woraus sich mit $\sigma_0 = 1$ die Gewichtsmatrix ergibt zu

$$\mathbf{P}_{c,i} = \text{diag}(1 \quad 1/0,1^2). \tag{2.20}$$

Da die Beobachtungen unkorreliert sind, werden aus diesen Daten für beide Punkte die exponentiellen Anteile $\omega_{c,i}$ berechnet und in Abb. 1 dargestellt. Man erkennt für die

Tab. 1: Vorliegende Beobachtungen im kartesischen Beobachtungsraum

Punkt	x	y
1	2,5	4,8
2	4,0	5,0

sen zweidimensionalen Fall, dass die jeweiligen Konturlinien Ellipsen sind, deren Hauptachsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen.

Jetzt wird mit den üblichen Gleichungen die Transformation vom kartesischen in den polaren Beobachtungsraum durchgeführt:

$$s_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}, \quad r_i = a \tan 2(y_i, x_i). \tag{2.21}$$

Mit der Jacobi-Matrix dieser Transformation

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} x_i/s_i & y_i/s_i \\ -y_i/s_i^2 & x_i/s_i^2 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

wird für jeden Punkt entsprechend (2.16) die Gewichtsmatrix im polaren Beobachtungsraum bestimmt. Die damit berechneten exponentiellen Anteile $\omega_{p,i}$ sind in Abb. 2 dargestellt. Man erkennt, dass die Konturlinien wiederum Ellipsen sind. Allerdings können diese Ellipsen die Struktur der Konfidenzbereiche der Beobachtungen nur näherungsweise in der Umgebung der Punkte beschreiben.

Soll die korrekte Verteilung im polaren Beobachtungsraum beschrieben werden, muss die multivariate Verteilung im kartesischen Beobachtungsraum hierher transformiert werden. In Anlehnung an Koch (1997) und unter der Annahme, dass $\bar{\tau}$ die eindeutige Umkehrung von (2.9) beschreibt und $\bar{\mathbf{T}}$ die zugehörige Jacobi-Matrix dieser Transformation ist, gilt

$$\varphi_{p,i}(\hat{\mathbf{I}}_{p,i}) = \varphi_{c,i}(\bar{\tau}(\hat{\mathbf{I}}_{p,i})) |\det \bar{\mathbf{T}}|. \tag{2.23}$$

Für eine grafische Darstellung ist es ausreichend, die mit (2.18) im kartesischen Beobachtungsraum bestimmten Anteile am entsprechenden Ort im polaren Beobachtungsraum zu nutzen, um die exponentiellen Anteile im polaren Beobachtungsraum anzugeben. Dabei gilt für diesen Ort

$$\mathbf{I}_{p,i} + \mathbf{v}_{p,i} = \tau(\mathbf{I}_{c,i} + \mathbf{v}_{c,i}). \tag{2.24}$$

Abb. 3 zeigt die im kartesischen Beobachtungsraum bestimmten exponentiellen Anteile, abgebildet an den entsprechenden Orten im polaren Beobachtungsraum. Man erkennt deutlich, dass die Konturlinien keine Ellipsen mehr ergeben. Daher muss davon ausgegangen werden, dass die polaren Beobachtungen nicht mehr exakt normalverteilt sind.

Die Problematik der Verformung der Wahrscheinlichkeitsdichte könnte ggf. durch Verwendung einer Unscented Transformation (UT) (Julier et al. 1995) behoben werden, die ausgezeichnete Punkte der Wahrscheinlichkeitsdichte, z. B. die Endpunkte der Hauptachsen der Konfidenzellipsen im kartesischen Beobachtungsraum, in den polaren Beobachtungsraum transformiert und damit eine bessere Approximation verspricht. Auch die Anwendung der Monte-Carlo-Methode (Koch 2018 und Schwarz 2020) wäre zur Lösung dieser Problematik möglich. Die zweite

Problematik bleibt allerdings bestehen, die Beobachtungen im polaren Beobachtungsraum sind nur näherungsweise normalverteilt. Eine mögliche Lösung könnte darin bestehen, das Optimum für die geänderte Wahrscheinlichkeitsdichte mittels der Maximum-Likelihood-Methode (Blobel und Lohrmann 1998) zu bestimmen. Allerdings wurde in Lösler (2020b) bereits dargelegt, dass z. B. durch Modifikation der Zielfunktion eine Lösung mittels der M.d.k.Q. erreicht werden kann. Ein ähnliches Vorgehen, bei dem die ursprüngliche Zielfunktion nicht modifiziert werden muss und das die Ausgleichung implizierter Beobachtungsgleichungen im Gauß-Markov-Modell nutzt, wird im nachfolgenden Abschnitt vorgestellt.

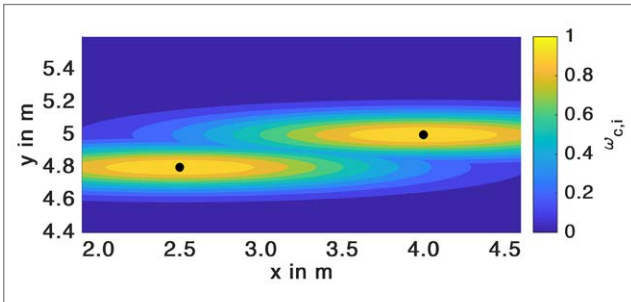


Abb. 1: Exponentielle Anteile $\omega_{c,i}$ beider Punkte im kartesischen Beobachtungsraum. Die schwarzen Punkte geben die Orte der Beobachtungen im kartesischen Beobachtungsraum an.

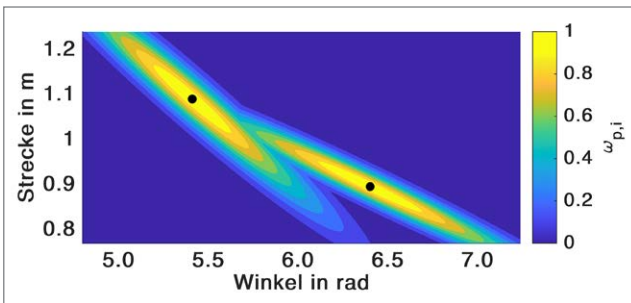


Abb. 2: Exponentielle Anteile $\omega_{p,i}$ beider Punkte im polaren Beobachtungsraum. Die Gewichtsmatrizen sind jeweils aus der Varianzfortpflanzung für linearisierte Transformationsfunktionen abgeleitet worden.

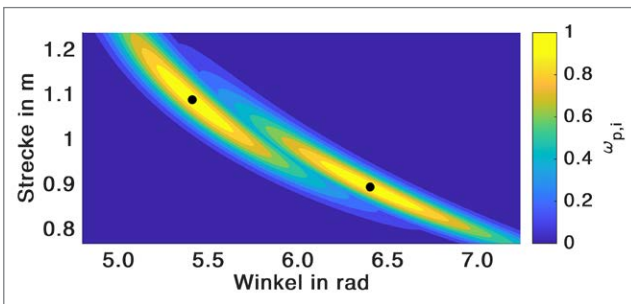


Abb. 3: Tatsächliche exponentielle Anteile $\omega_{p,i}$ beider Punkte im polaren Beobachtungsraum

3 Ausgleichung im alternativen Beobachtungsraum

3.1 Ausgleichung impliziter Beobachtungsgleichungen im alternativen Beobachtungsraum

Die Herleitung der Lösung im alternativen Beobachtungsraum ist im Grunde recht einfach, da der notwendige Formelapparat bereits im vorhergehenden Kapitel angegeben wurde. Die Linearisierung der Transformationsfunktion für k Beobachtungen im alternativen Beobachtungsraum aus (2.9) kann für die aktuellen Näherungswerte der ausgeglichenen Beobachtungen durchgeführt werden. Damit erhält man

$$d\mathbf{l}_a = \mathbf{I}_a + \mathbf{v}_a - \mathbf{I}_{a,0} = \mathbf{T}d\mathbf{l} = \mathbf{T}(\mathbf{I} + \mathbf{v} - \mathbf{I}_0). \quad (3.1)$$

Die Jacobi-Matrix der Transformation muss dabei in jeder Iterationsstufe neu berechnet werden:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_1(\mathbf{I}_0)}{\partial l_1} & \dots & \frac{\partial \tau_1(\mathbf{I}_0)}{\partial l_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tau_k(\mathbf{I}_0)}{\partial l_1} & \dots & \frac{\partial \tau_k(\mathbf{I}_0)}{\partial l_n} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Gleichung (3.1) wird jetzt in (2.11) eingesetzt, so dass sich ergibt

$$\mathbf{g}_{a,0} + \mathbf{A}_a d\mathbf{x} + \mathbf{F}_a^T d\mathbf{l} = 0. \quad (3.3)$$

Für die abgeleiteten Beobachtungen aus (2.13) ergibt sich nun

$$\mathbf{z}_a = -\mathbf{F}_a^T \mathbf{T} \mathbf{l}, \quad \mathbf{z}_{a,0} = \mathbf{g}_{a,0} - \mathbf{F}_a^T \mathbf{T} \mathbf{l}_0, \quad \mathbf{v}_{z_a} = -\mathbf{F}_a^T \mathbf{T} \mathbf{v}. \quad (3.4)$$

Die notwendige Gewichtsmatrix erhält man aus

$$\mathbf{P}_{z_a} = \mathbf{Q}_{z_a}^{-1} = (\mathbf{F}_a^T \mathbf{T} \mathbf{Q} \mathbf{T}^T \mathbf{F}_a)^{-1} = (\mathbf{F}_a^T \mathbf{T} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{F}_a)^{-1}. \quad (3.5)$$

Die Lösung erhält man direkt aus (2.12). Für die Iteration müssen wieder die Residuen bestimmt werden. Die Residuen im ursprünglichen Beobachtungsraum erhält man in Analogie zu Reinking (2008) aus einem Vergleich von

$$\mathbf{v}_{z_a} = \mathbf{Q}_{z_a} \mathbf{P}_{z_a} \mathbf{v}_{z_a} = \mathbf{F}_a^T \mathbf{T} \mathbf{Q} \mathbf{T}^T \mathbf{F}_a \mathbf{P}_{z_a} \mathbf{v}_{z_a} \quad (3.6)$$

mit (3.4) zu

$$\mathbf{v} = -\mathbf{Q} \mathbf{T}^T \mathbf{F}_a^T \mathbf{P}_{z_a} \mathbf{v}_{z_a}. \quad (3.7)$$

Auch die Residuen im alternativen Beobachtungsraum können durch Umstellung von (3.1) angegeben werden:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{T}(\mathbf{I} + \mathbf{v} - \mathbf{I}_0) - (\mathbf{I}_a - \mathbf{I}_{a,0}). \quad (3.8)$$

Dabei ist zu beachten, dass für die Berechnung die Näherungswerte der Beobachtungsvektoren verwendet werden, die in der aktuellen Iterationsstufe eingeführt wurden. Diese ergeben sich aus den Beobachtungen und den Residuenvektoren der vorhergehenden Iterationsstufe. In Gleichung (3.8) muss aber der Residuenvektor aus (3.7) der aktuellen Iterationsstufe verwendet werden. Erst im Laufe der Iteration wird der erste Term auf der rechten Seite von (3.8) auch für die aktuelle Iterationsstufe zu einem Nullvektor.

Für reguläre Probleme geht die Zielfunktion aus (1.1) für die ursprünglichen Beobachtungen über in

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_{z_a}^T \mathbf{P}_{z_a} \mathbf{F} \mathbf{T} \mathbf{Q} \mathbf{P} \mathbf{Q}^T \mathbf{F}_a^T \mathbf{P}_{z_a} \mathbf{v}_{z_a} \\ &= \mathbf{v}_{z_a}^T \mathbf{P}_{z_a} \mathbf{F} \mathbf{T} \mathbf{Q} \mathbf{T}^T \mathbf{F}_a^T \mathbf{P}_{z_a} \mathbf{v}_{z_a} \\ &= \mathbf{v}_{z_a}^T \mathbf{P}_{z_a} \mathbf{P}_{z_a}^{-1} \mathbf{P}_{z_a} \mathbf{v}_{z_a} \\ &= \mathbf{v}_{z_a}^T \mathbf{P}_{z_a} \mathbf{v}_{z_a} \Rightarrow \min. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Es sei an dieser Stelle explizit erwähnt, dass die obige Identität in jeder Iterationsstufe gilt, da die differentiellen Vektoren in (3.1), wie bereits erwähnt, immer Nullvektoren sind. In jeder Iterationsstufe wird damit die Gewichtsmatrix in (3.5) an die aktuellen Näherungswerte der Beobachtungen angepasst.

3.2 Ausgleichung expliziter Beobachtungsgleichungen im alternativen Beobachtungsraum

Können die Beobachtungsgleichungen explizit aufgestellt werden, dann vereinfacht sich die Berechnung, da die Jacobi-Matrix \mathbf{F} zu einer negativen Einheitsmatrix wird. Für Gleichung (2.10) kann dann gesetzt werden

$$g_{a,i}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{l}}_a) = g_{a,i}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{0}) - \hat{\mathbf{l}}_a = 0. \tag{3.10}$$

Damit erhält man

$$\mathbf{g}_{a,0} = \mathbf{g}_a(\mathbf{x}_0, \mathbf{0}) - \mathbf{l}_{a,0} = 0, \tag{3.11}$$

und (2.11) wird zu

$$\mathbf{A}_a \mathbf{d} \mathbf{x} - \mathbf{d} \mathbf{l}_a = 0. \tag{3.12}$$

Die Lösung aus (2.12) ergibt sich aus

$$\mathbf{d} \mathbf{x} = (\mathbf{A}_a^T \mathbf{P}_{z_a} \mathbf{A}_a)^{-1} \mathbf{A}_a^T \mathbf{P}_{z_a} \mathbf{T} (\mathbf{l}_a - \mathbf{l}_{a,0}). \tag{3.13}$$

Auch die Gewichtsmatrix vereinfacht sich zu

$$\mathbf{P}_{z_a} = (\mathbf{T} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{T}^T)^{-1}. \tag{3.14}$$

Dies entspricht jetzt der Gewichtsmatrix \mathbf{P}_a aus (2.16), allerdings mit einer Jacobi-Matrix der Transformation, die in jeder Iterationsstufe neu berechnet wird. Es kann also festgehalten werden, dass selbst bei linearen expliziten

Beobachtungsgleichungen eine Iteration notwendig ist, wenn die Beobachtungen in einem alternativen Beobachtungsraum transformiert werden. Nur wenn diese Transformation linear ist, kann auf die Iteration verzichtet werden.

4 Numerische Beispiele

In zwei numerischen Beispielen sollen die theoretischen Darstellungen der vorherigen Abschnitte veranschaulicht werden. Dabei sollen hier nur die grundlegenden Berechnungsschritte angegeben werden. Für interessierte Leser können Matlab-Skripte zu den Beispielen auf Anforderung zur Verfügung gestellt werden.

4.1 Überbestimmte Koordinatenbestimmung

Das erste Beispiel geht von einer typischen Situation einer überbestimmten geodätischen Koordinatenbestimmung aus. Gegeben seien zwei Festpunkte 1 und 2, von denen die Strecken s_1 und s_2 zu einem neu zu bestimmenden Punkt N gemessen wurden. Gleichzeitig liegen die auf den Festpunkten gemessenen Winkel α_1 und α_2 zwischen dem Neupunkt und dem jeweils anderen Festpunkt vor. Der Übersichtlichkeit halber soll ein vereinfachter Fall behandelt werden, bei dem der erste Festpunkt im Ursprung eines rechtshändigen kartesischen Koordinatensystems liegt. Der zweite Festpunkt liegt auf der x -Achse in einer Entfernung $d = 100$. Abb. 4 zeigt unmaßstäblich die

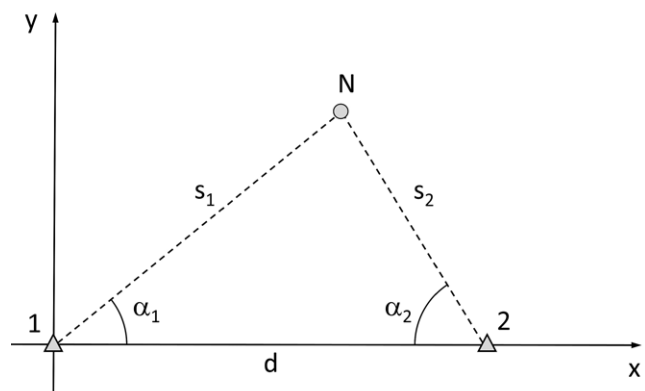


Abb. 4: Unmaßstäbliche Darstellung der geometrischen Situation. Die Festpunkte 1 und 2 liegen in einer Entfernung von d zueinander auf der x -Achse des Koordinatensystems, die Winkel α_1 und α_2 und die Strecken s_1 und s_2 wurden auf ihnen zum Neupunkt N gemessen.

Tab. 2: Koordinaten der Festpunkte und Winkel und Streckenbeobachtungen

Punkt	x	y	s	α
1	0	0	87,45	37,3°
2	100	0	62,15	61,1°

geometrische Situation. Die Koordinaten und Beobachtungen sind in Tab. 2 angegeben.

Für die Strecken wird eine Standardabweichung von 0,02 m angenommen, für die Winkel soll diese 0,25° betragen. Die Winkel und Strecken sind für jeden Punkt im Beobachtungsvektor \mathbf{l}_p nacheinander angeordnet:

$$\mathbf{l}_p = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad s_1 \quad s_2)^T. \quad (4.1)$$

Damit ergibt sich die Kovarianzmatrix zu

$$\Sigma_p = \text{diag}(0,25^2 \quad 0,25^2 \quad 0,02^2 \quad 0,02^2). \quad (4.2)$$

Auch wenn die Ausgleichung zur Bestimmung der unbekanntenen Koordinaten des Neupunktes klassisch mittels expliziter Beobachtungsgleichungen im Gauß-Markov-Modell durchgeführt werden könnte, sollen hier implizite Beobachtungsgleichungen aufgestellt werden. Es ergeben sich daher für diesen einfachen Fall

$$\begin{aligned} g_{p,1}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{l}}) &= a \tan 2(\hat{y}_N, \hat{x}_N) - (\alpha_1 + v_{p_1}) \\ g_{p,2}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{l}}) &= a \tan 2(\hat{y}_N, d - \hat{x}_N) - (\alpha_2 + v_{p_2}) \\ g_{p,3}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{l}}) &= \sqrt{\hat{x}_N^2 + \hat{y}_N^2} - (s_1 + v_{p_3}) \\ g_{p,4}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{l}}) &= \sqrt{(d - \hat{x}_N)^2 + \hat{y}_N^2} - (s_2 + v_{p_4}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Für die Jacobi-Matrizen in (2.3) erhält man mit x_0 und y_0 als Näherungswerte für die ausgeglichenen Koordinaten des Neupunktes

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} -y_0/(x_0^2 + y_0^2) & x_0/(x_0^2 + y_0^2) \\ y_0/((d-x_0)^2 + y_0^2) & (d-x_0)/((d-x_0)^2 + y_0^2) \\ x_0/\sqrt{x_0^2 + y_0^2} & y_0/\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \\ -(d-x_0)/\sqrt{(d-x_0)^2 + y_0^2} & y_0/\sqrt{(d-x_0)^2 + y_0^2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_p = \text{diag}(-1 \quad -1 \quad -1 \quad -1). \quad (4.4)$$

Mit den Startwerten $x_0 = 69,5$; $y_0 = 53,0$ erhält man nach drei Iterationen die ausgeglichenen Koordinaten und Residuen

$$\hat{x}_N = 68,932811; \quad \hat{y}_N = 53,823602, \quad \mathbf{v}_p = \begin{bmatrix} -0,683164^\circ \\ 1,093706^\circ \\ -0,006919 \\ 0,003798 \end{bmatrix}.$$

Abb. 5 zeigt die exponentiellen Anteile $\omega_{p,i}$ beider Punkte im polaren Beobachtungsraum. Die beiden Orte der Beobachtungen auf den Festpunkten sind als schwarze Punkte dargestellt. Hält man jeweils die Beobachtungen eines Festpunktes fest, dann sind, wie aus Abb. 4 ersichtlich ist,

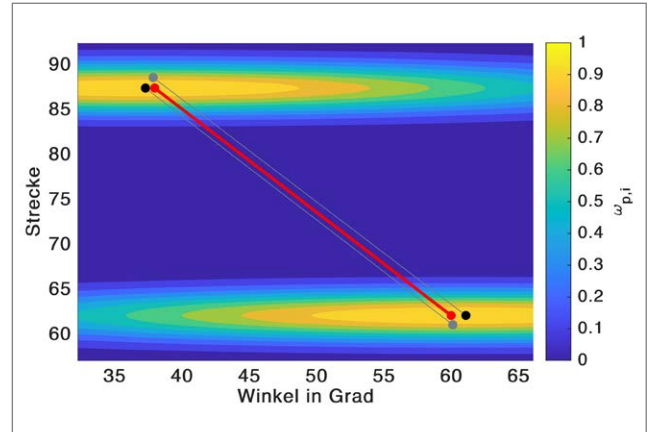


Abb. 5: Exponentielle Anteile $\omega_{p,i}$ im polaren Beobachtungsraum. Schwarze Punkte stellen die Beobachtungen an den Festpunkten dar. Die grauen Linien und ihre Endpunkte geben mögliche Lösungen an, wenn jeweils die Beobachtungen an den Festpunkten festgehalten werden würden. Die ausgeglichene Kombination ist durch die rote Linie angegeben und erzeugt die größte Wahrscheinlichkeit. Die Standardabweichungen sind für die grafische Darstellung 100-fach überhöht.

die Beobachtungen auf dem jeweils anderen Festpunkt dadurch ebenfalls geometrisch festgelegt. Diese sind durch einen grauen Punkt dargestellt, der mit den erzeugenden Beobachtungen mit einer Linie verbunden ist. Die optimale Lösung ergibt sich für die Linie zwischen zwei verknüpfbaren Orten im polaren Beobachtungsraum, die den größten exponentiellen Anteil als Produkt der einzelnen exponentiellen Anteile $\omega_{p,i}$ und damit die größte Wahrscheinlichkeit erzeugt. Diese ist in Abb. 5 in Rot dargestellt.

Jetzt soll eine Ausgleichung im kartesischen Beobachtungsraum erfolgen. Die polaren Beobachtungen werden dazu für jeden Festpunkt in kartesische Beobachtungen umgewandelt:

$$\mathbf{l}_c = \begin{bmatrix} x_{N,1} \\ y_{N,1} \\ x_{N,2} \\ y_{N,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \cos \alpha_1 \\ s_1 \sin \alpha_1 \\ d - s_2 \cos \alpha_2 \\ s_2 \sin \alpha_2 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Die Jacobi-Matrix dieser Transformation lautet entsprechend

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -(y_{N,1} + v_{y_1}) & 0 & (x_{N,1} + v_{x_1})/s_{1,0} & 0 \\ x_{N,1} + v_{x_1} & 0 & (y_{N,1} + v_{y_1})/s_{1,0} & 0 \\ 0 & y_{N,2} + v_{y_2} & 0 & (x_{N,2} + v_{x_2} - d)/s_{2,0} \\ 0 & d - (x_{N,2} + v_{x_2}) & 0 & (y_{N,2} + v_{y_2})/s_{2,0} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

$$\text{mit } s_{1,0} = \sqrt{(x_{N,1} + v_{x_1})^2 + (y_{N,1} + v_{y_1})^2},$$

$$s_{2,0} = \sqrt{(d - (x_{N,2} + v_{x_2}))^2 + (y_{N,2} + v_{y_2})^2}.$$

Die impliziten Beobachtungsgleichungen werden nun besonders einfach, weil sie linear sind

$$\begin{aligned}
 g_{c,1}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{I}}_c) &= \hat{x}_N - (x_{N,1} + v_{x_1}) \\
 g_{c,2}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{I}}_c) &= \hat{y}_N - (y_{N,1} + v_{y_1}) \\
 g_{c,3}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{I}}_c) &= \hat{x}_N - (x_{N,2} + v_{x_2}) \\
 g_{c,4}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{I}}_c) &= \hat{y}_N - (y_{N,2} + v_{y_2})
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Auch die Jacobi-Matrizen werden entsprechend einfach

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_c = \text{diag}(-1 \quad -1 \quad -1 \quad -1). \tag{4.8}$$

Mit den obigen Startwerten erhält man ebenfalls nach drei Iterationen die identischen ausgeglichenen Koordinaten und Residuen im kartesischen Beobachtungsraum

$$\hat{x}_N = 68,932811; \quad \hat{y}_N = 53,823602, \quad \mathbf{v}_c = \begin{bmatrix} -0,631345 \\ 0,829917 \\ -1,031189 \\ -0,586518 \end{bmatrix}.$$

In Abb. 6 sind die exponentiellen Anteile $\omega_{c,i}$ beider Punkte im kartesischen Beobachtungsraum angegeben. Die beiden Orte der kartesischen Beobachtungen auf den Festpunkten sind als schwarze Punkte, der ausgeglichene Neupunkt

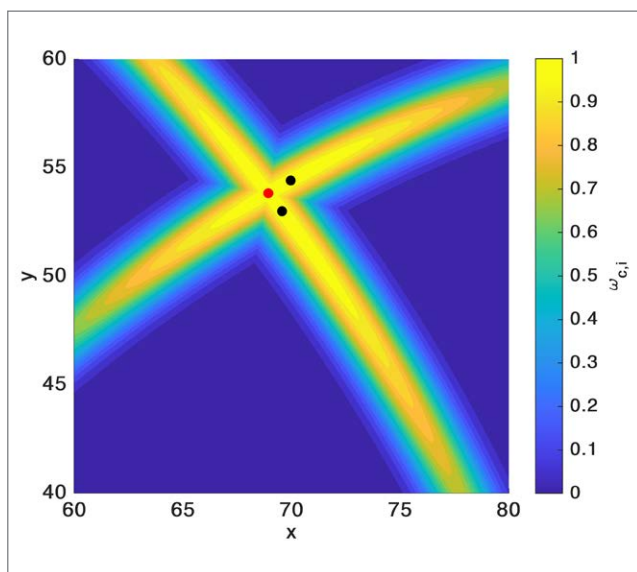


Abb. 6: Exponentielle Anteile $\omega_{c,i}$ beider Punkte im kartesischen Beobachtungsraum. Die schwarzen Punkte stellen die aus den jeweils zu einem der Festpunkte gehörigen Beobachtungen berechneten Orte dar. Die Standardabweichungen sind für die grafische Darstellung 50-fach überhöht.

als roter Punkt dargestellt. Man erkennt deutlich, dass die x- und y-Komponenten nicht normalverteilt sind.

Ginge man davon aus, dass in der näheren Umgebung der schwarzen Punkte in Abb. 6 die tatsächliche multivariante Wahrscheinlichkeitsdichte näherungsweise durch die Wahrscheinlichkeitsdichte einer multivariaten Normalverteilung ersetzt werden kann, und nutzt die konstante Gewichtsmatrix aus (2.16) für die Minimierung der Zielfunktion aus (1.2), dann ergäben sich die Koordinaten des Neupunktes zu $x_n = 68,931428$; $y_n = 53,835685$. Diese entsprechen nur näherungsweise den korrekten Koordinaten und zeigen Abweichungen, die mit ca. 0,01 kleiner als die Standardabweichung der ausgeglichenen Koordinaten der korrekten Lösung sind. Für viele geodätische Anwendungen kann von ähnlichen Bedingungen ausgegangen werden, sodass hierfür unter Umständen auch Näherungslösungen verwendbar wären. Allerdings sollte nicht vergessen werden, dass diese Lösungen eben nicht exakt sein können.

Da die Ausgleichung sowohl im polaren als auch im kartesischen Beobachtungsraum zu identischen Normalgleichungsmatrizen führt, sind die beiden Lösungsmöglichkeiten als numerisch gleichstabil anzusehen. Da die Kofaktormatrix für die abgeleiteten Beobachtungen z bzw. z_a sich im polaren Beobachtungsraum als reine Diagonalmatrix ergibt, während sie für den kartesischen Beobachtungsraum eine Blockdiagonalstruktur aufweist, ist die Inversion zur Berechnung der Gewichtsmatrix für den zweiten Fall geringfügig aufwändiger.

4.2 Zielpunktbestimmung aus polaren Messungen

Das zweite Beispiel ist angelehnt an das klassische Beispiel für die Verwendung eines Unscented Kalman Filters (UKF) (Julier und Uhlmann 2004), das in ähnlicher Form auch in Lösler (2020a) Verwendung findet. Dabei sollen von einem Standpunkt Richtungswinkel und Strecken zu einem zu bestimmenden Punkt gemessen sein. Im Grunde handelt es sich hierbei um eine Abwandlung des ersten Beispiels, bei dem die beiden Festpunkte zusammenfallen. Hier sollen zwei Beobachtungspaare vorliegen, die in einem rechtshändigen kartesischen Koordinatensystem eine symmetrische Anordnung um einen Richtungswinkel von 45° ergeben.

Tab. 3: Richtungswinkel α und Strecken s für das Beispiel der Zielpunktbestimmung

Beobachtungspaar	s	α
1	100	55°
2	100	35°

Zunächst sind im polaren Beobachtungsraum die unbekannt Parameter \hat{s} und $\hat{\alpha}$ gesucht, die die folgenden impliziten Beobachtungsgleichungen erfüllen

$$\begin{aligned} g_{\alpha,i}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{l}}) &= \hat{\alpha} - (\alpha_i + v_{\alpha_i}) \\ g_{s,i}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{l}}) &= \hat{s} - (s_i + v_{s_i}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Für den polaren Beobachtungsvektor

$$\mathbf{l}_p = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad s_1 \quad s_2)^T \quad (4.10)$$

sei die Kovarianzmatrix gegeben durch

$$\Sigma_p = \text{diag}(10^2 \quad 10^2 \quad 0,5^2 \quad 0,5^2). \quad (4.11)$$

Da die Beobachtungen unkorreliert sind, müssen für beide Beobachtungspaare die exponentiellen Anteile im polaren Beobachtungsraum elliptische Konturlinien zeigen, deren Hauptachsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen.

Die impliziten Beobachtungsgleichungen sind sehr einfach und linear, die Beobachtungstypen sind gleichgewichtig und unkorreliert. Daher kann die Lösung ohne weitere Berechnung sofort aus den Mittelwerten der jeweiligen Beobachtungen bestimmt werden:

$$\hat{\alpha} = 45^\circ \text{ und } \hat{s} = 100.$$

Wiederum soll eine Ausgleichung im kartesischen Beobachtungsraum erfolgen. Allerdings sollen hier explizite Beobachtungsgleichungen und damit das Vorgehen aus Abschnitt 3.2 Verwendung finden:

$$\begin{aligned} g_{x,i}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{l}}) &= g_{x,i}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{0}) - \hat{x}_i = \hat{x} - (x_i + v_{x_i}) \\ g_{y,i}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{l}}) &= g_{y,i}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{0}) - \hat{y}_i = \hat{y} - (y_i + v_{y_i}) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Hier findet also zusätzlich auch ein Übergang in einen alternativen Parameterraum statt. Die polaren Beobachtungen werden wie üblich in kartesische Beobachtungen umgewandelt:

$$\mathbf{l}_c = [x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2]^T; \quad x_i = s_i \cos \alpha_i; \quad y_i = s_i \sin \alpha_i. \quad (4.13)$$

Die Jacobi-Matrix dieser Transformation ergibt sich zu

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -(y_1 + v_{y_1}) & 0 & (x_1 + v_{x_1})/s_{1,0} & 0 \\ x_1 + v_{x_1} & 0 & (y_1 + v_{y_1})/s_{1,0} & 0 \\ 0 & -(y_2 + v_{y_2}) & 0 & (x_2 + v_{x_2})/s_{2,0} \\ 0 & x_2 + v_{x_2} & 0 & (y_2 + v_{y_2})/s_{2,0} \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

$$\text{mit } s_{i,0} = \sqrt{(x_i + v_{x_i})^2 + (y_i + v_{y_i})^2}.$$

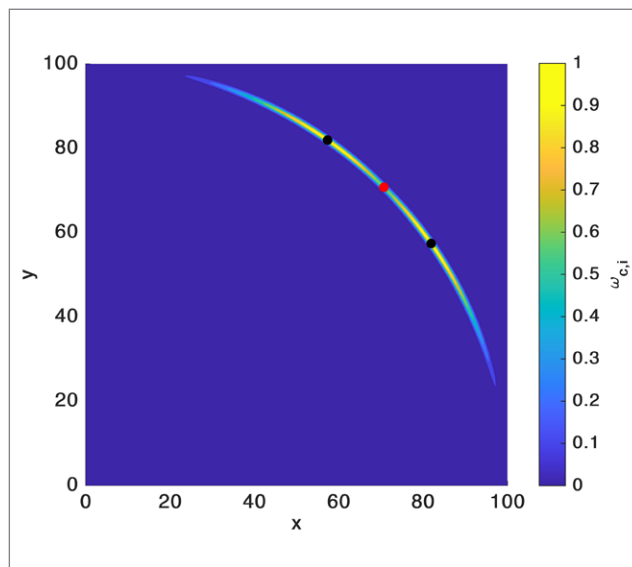


Abb. 7: Exponentielle Anteile $\omega_{c,i}$ beider Punkte im kartesischen Beobachtungsraum. Die schwarzen Punkte stellen die Beobachtungsorte dar, der rote Punkt zeigt die ausgeglichenen Koordinaten.

Die Jacobi-Matrix \mathbf{A}_c kann aus (4.8) übernommen werden. Als Näherungswerte x_0 und y_0 für die unbekannt Parameter werden zunächst die Mittelwerte der Koordinaten x_i und y_i verwendet. Damit ergeben sich die Näherungswerte der Beobachtungen zu

$$\mathbf{l}_{c,0} = [x_0 \quad y_0 \quad x_0 \quad y_0]^T. \quad (4.15)$$

Nach zwei Iterationen werden die ausgeglichenen Koordinaten im kartesischen Beobachtungsraum erreicht:

$$\hat{x} = 70.710678; \quad \hat{y} = 70.710678.$$

Diese Werte entsprechen exakt den Koordinaten, die sich bei der Umwandlung der ausgeglichenen polaren Parameter in kartesische Werte ergeben.

Die exponentiellen Anteile im kartesischen Beobachtungsraum sind in Abb. 7 angegeben. Die beiden Orte der Beobachtungen sind als schwarze Punkte, die ausgeglichenen Koordinaten als roter Punkt dargestellt. Auch hier ist deutlich sichtbar, dass die x- und y-Komponenten nicht normalverteilt sind, da die Konfidenzbereiche eine bogenförmige Struktur aufweisen. Dass der korrekt ausgeglichene Punkt auf einem mittleren Kreisbogen liegen muss, wird klar, wenn man von einem fehlerfreien Messsystem für die Strecke ausgehen würde. Alle mit (4.13) bestimmten kartesischen Beobachtungen müssen dann auf exakt einem Kreisbogen liegen. Für alle Punkte, die nicht auf dem Kreisbogen liegen, sind die exponentiellen Anteile und damit die Werte der Wahrscheinlichkeitsdichte null.

Würde anstelle der hier durchgeführten korrekten Ausgleichung eine Auswertung mit einer vorab einmalig nach (2.16) berechneten Gewichtsmatrix und Minimierung von (1.2) durchgeführt werden, dann würden die

Konfidenzbereiche für beide Punkte als ellipsenförmig angenommen. Dabei müssten die großen Halbachsen im jeweiligen Punkt tangential zu den zugehörigen Bögen verlaufen. Das muss zwangsläufig dazu führen, dass der so ausgeglichene Punkt außerhalb des Kreisbogens liegen würde und damit das Ergebnis fehlerhaft wäre.

Durch den Übergang in einen alternativen Parameterraum lassen sich die Lösungen hinsichtlich ihrer numerischen Stabilität nicht direkt vergleichen. Würde man auf diesen Übergang verzichten, dann ergäben sich sowohl für die Kofaktormatrix der abgeleiteten Beobachtungen z bzw. z_a als auch für die Normalgleichungsmatrix identische Werte. Daher können die Lösungen im polaren und kartesischen Beobachtungsraum als numerisch gleich stabil angesehen werden.

5 Schlussbemerkungen

Es wurde dargestellt, dass beim Übergang zwischen zwei Beobachtungsräumen die Kovarianzfortpflanzung zur Bestimmung einer konstanten Gewichtsmatrix vor der Ausgleichung im alternativen Beobachtungsraum nur für lineare Fälle korrekte Ergebnisse liefern kann. Ist der Übergang zwischen den Beobachtungsräumen nichtlinear, dann kann dieses Vorgehen nur Näherungslösungen liefern.

Für eine korrekte Lösung im alternativen Beobachtungsraum ist die Darstellung der Beobachtungsgleichungen in impliziter Form geeignet. Da hierbei eine iterative Lösung erzeugt wird, kann in jedem Iterationsschritt eine Anpassung der Gewichtsmatrix durch eine Kovarianzfortpflanzung mit den aktuellen Näherungswerten der ausgeglichenen Beobachtungen erfolgen. Dies ist dadurch zielführend, dass im gewählten Gauß-Markov-Modell in jedem Iterationsschritt die differentiellen Beobachtungsvektoren in beiden Beobachtungsräumen tatsächlich Nullvektoren sind.

Können explizite Beobachtungsgleichungen verwendet werden, dann muss, selbst wenn diese bezüglich der unbekannt Parameter linear sind, eine iterative Lösung erzeugt werden, da die Anpassung der Gewichtsmatrix unumgänglich ist. Ausschließlich für den Fall eines linearen Übergangs zwischen den Beobachtungsräumen könnte auf eine Iteration verzichtet werden.

Bei sachgerechter Anwendung liefert das vorgestellte Verfahren identische Lösungen, unabhängig von der Wahl des Beobachtungs- und des Parameterraumes. Auch die numerische Stabilität der Lösungen in unterschiedlichen Beobachtungsräumen ist nahezu gleichwertig. Die Wahl des Beobachtungsraumes sollte daher eher hinsichtlich leichter Praktikabilität und hoher Zweckmäßigkeit erfolgen.

Literatur

- Blobel, V., Lohrmann, E. (1998): Statistische und numerische Methoden der Datenanalyse. Wiesbaden, Vieweg+Teubner Verlag (Teubner Studienbücher Physik).
- Julier, S.J., Uhlmann, J.K. (2004): Unscented Filtering and Nonlinear Estimation. In: Proc. IEEE 92 (3), 401–422. DOI: 10.1109/JPROC.2003.823141.
- Julier, S.J., Uhlmann, J.K., Durrant-Whyte, H.F. (1995): A new approach for filtering nonlinear systems. In: Proceedings of the 1995 American Control Conference. The Westin Hotel, Seattle, Washington, June 21 – June 23, 1995. 1995 American Control Conference – ACC'95. Seattle, WA, USA, 21–23 June 1995. American Control Conference; American Automatic Control Council; American Control Conference (ACC). Piscataway, NJ: IEEE Service Center, 1628–1632.
- Koch, K.-R. (1997): Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen. 3., bearb. Aufl., Bonn, Dümmler.
- Koch, K.-R. (2018): Monte Carlo methods. In: Int J Geomath 9 (1), 117–143. DOI: 10.1007/s13137-017-0101-z.
- Lösler, M. (2020a): Modellbildungen zur Signalweg- und in-situ Referenzpunktbestimmung von VLBI-Radioteleskopen. München, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, 865.
- Lösler, M. (2020b): Zur Parameterschätzung mit unterschiedlichen Koordinatendarstellungen. In: zfv – Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement, Heft 6/2020, 145. Jg., 385–392. DOI: 10.12902/zfv-0319-2020.
- Niemeier, W. (2008): Ausgleichsrechnung. Statistische Auswertemethoden. Tübingen, De Gruyter (De Gruyter Lehrbuch). Online: <http://gbv.eblib.com/patron/FullRecord.aspx?p=3044705>.
- Reinking, J. (2008): Total least squares? In: In: zfv – Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement, Heft 6/2008, 133. Jg., 384–389.
- Schwarz, W. (2020): Methoden zur Bestimmung der Messunsicherheit nach GUM – Teil 2. In: avn – Allgemeine Vermessungs-Nachrichten 127 (5), 211–219.

Kontakt

Prof. Dr.-Ing. Jörg Reinking
Jade Hochschule, Institut für Mess- und Auswertetechnik
Ofener Straße 16-19, 26121 Oldenburg
reinking@jade-hs.de

Dieser Beitrag ist auch digital verfügbar unter www.geodaesie.info.