Nachbarschaftstreue Anpassung mittels bilinearer Filterung

Otto Heunecke

Zusammenfassung
Die bilineare Filterung dient der Ermittlung von Funktionswerten im Umfeld von flächenhaft verteilten Stützpunkten. Eine Anwendung ist die Verteilung der Restklaffen zur nachbarschaftstreuen Anpassung von Koordinaten. Bedingt durch den Bezugssystemwechsel zu ETRS89/UTM und den damit verbundenen größeren Abweichungen von Strecken in der UTM-Abbildungsebene und der Örtlichkeit liegt eine solche Anwendung in der Gestaltung des Übergangsbereiches vom Sondernetz eines Bauvorhabens zu den umgebenden amtlichen Koordinaten und den durch sie beschriebenen Objekten.

Summary
Bilinear filtering is used to determine functional quantities in the vicinity of survey control points. One application is the estimation of residual gaps allocation in the neighbourhood of transformed coordinates. Due to the reference system change to ETRS89/UTM the associated larger deviations of distances in the UTM plane and the respective site, such an application is the design of the transition area from the local network of a construction project to the surrounding objects represented as official geo data.

Schlüsselwörter: Abstandsgewichte, Bauvorhaben, multiquadratische Interpolation, Restklaffenverteilung, UTM-Projektmaßstab

1 Einleitung

Eine wiederkehrende Aufgabe – nicht nur in der Geodäsie – besteht darin, aus den vorliegenden Funktionswerten $f(u)$ flächenhaft verteilter Stützpunkte $P(x,y)$ auf den kontinuierlichen Verlauf dieser Funktion in der Nachbarschaft dieser Stützstellen zu schließen. Die Funktionswerte $f(u)$ in den Stützpunkten werden allgemein auch als Shiftwerte bezeichnet. Unter einer solchen Funktion $f(u)$ kann beispielsweise verstanden werden:

- Farbwerte oder Texturen bei der digitalen Bildverarbeitung, z. B. für das Echtzeitrendering in der Computergrafik,
- Modellierung von Kartenverzerrungen (Gielsdorf und Gründig 1997, Beineke 2007),
- Höhenwerte bei der Berechnung eines digitalen Geländemodells,
- Verteilung der Restklaffen zur nachbarschaftstreuen Anpassung von Koordinaten (Fröhlich 1987, Wieser et al. 2003).

Entsprechend der Formulierung der Funktion $f(u)$, u. a. auch ob durch optionale Pseudobeobachtungen geometrische Bedingungen eingeführt werden (siehe Gielsdorf und Gründig 1997), bleiben die Nachbarschaftsbeziehungen zwischen den umzurechnenden Punkten gewahrt. Im Folgenden wird anhand von Simulationen gezeigt, wie die bilineare Filterung zur nachbarschaftstreuen Anpassung von Koordinaten genutzt werden kann. Gielsdorf und Gründig (1997, S. 210) sprechen von den Restklaffen als »punktförmige Repräsentanten einer flächenhaft wirkenden Systematik«. Das Filterverfahren wird beispielsweise auch im Zuge des Bezugssystemwechsels von DHDN/GK zu ETRS89/UTM sowohl für die bundeseinheitliche Transformation von ATKIS-Daten (BeTA 2007, AdV 2012) als auch in den meisten Bundesländern für die Transformation von ALKIS-Daten (in Bayern z. B. mit dem Projekt Kanu) genutzt. Anhand einer Simulation zum Umgang mit den Restklaffen bei Koordinaten werden die Ergebnisse exemplarisch mit Filterverfahren verglichen, die über die Abstände zu den Stützpunkten den gesuchten Funktionswert $f(u)$ eines Punktes P_i ermitteln. Eine denkbare Anwendung der bilinearen Filterung liegt darin, den Übergang von lokalen Sondernetzen, wie sie zur Errichtung von Ingenieurbauwerken im Regelfall benötigt werden, zu den amtlichen ETRS89/UTM-Koordinaten und den durch sie beschriebenen Objekten nachbarschaftstreu zu gestalten.

2 Bilineare Filterung

Gegeben seien die Eckpunkte P_1 bis P_4 eines Vierecks mit ihren Lagekoordinaten in der mit der Abb. 1 skizzierten

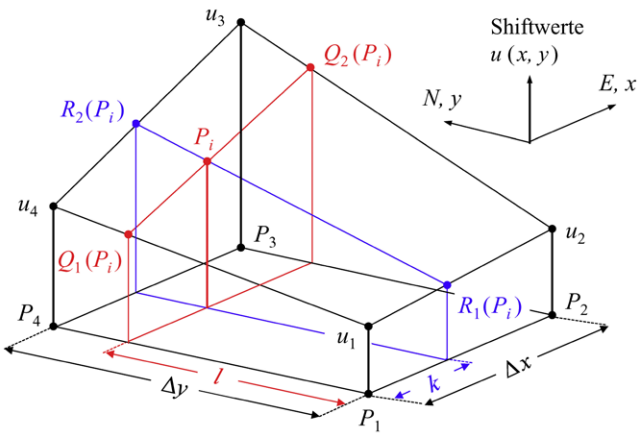


Abb. 1: Bilineare Interpolation einer Funktion $f(u)$ für einen Punkt P_i

Anordnung. Vereinbart sei mit y,x ein mathematisches Koordinatensystem. Für einen Punkt P_i ist der Wert einer Funktion $f(u)$ zu ermitteln, deren (Shift)Werte in den Eck- bzw. Stützpunkten bekannt sind.

Man schreibt für die beiden Punkte $R_1(P_i)$ und $R_2(P_i)$, deren Verbindungsgerade durch P_i geht und die die beiden Vektoren $\vec{P}_1\vec{P}_2$ und $\vec{P}_4\vec{P}_3$ jeweils im gleichen Verhältnis teilen

$$\vec{R}_1 = \vec{P}_1 + k \cdot \vec{P}_1\vec{P}_2 \,, \tag{1}$$

$$\vec{R}_2 = \vec{P}_4 + k \cdot \vec{P}_4\vec{P}_3 \,, \tag{2}$$

mit $k \in [0;1]$ für einen Punkt innerhalb der Masche, die durch die vier Eckpunkte beschrieben ist. Für den Punkt P_i gilt dann

$$\vec{P}_i = \vec{R}_1 + l \cdot \vec{R}_1\vec{R}_2 \,, \tag{3}$$

mit ebenfalls $l \in [0;1]$, sofern P_i in der Masche liegt. Somit liegen bezüglich der beiden Unbekannten k und l zwei implizite Gleichungen vor:

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + k\cdot(x_2 - x_1) + l\cdot(x_4 + k\cdot(x_3 - x_4) - x_1 - k\cdot(x_2 - x_1)) \\ y_1 + k\cdot(y_2 - y_1) + l\cdot(y_4 + k\cdot(y_3 - y_4) - y_1 - k\cdot(y_2 - y_1)) \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems wird einfach, wenn die Masche ein Rechteck darstellt. Mit $\Delta x = x_2 - x_1 = x_3 - x_4$, $\Delta y = y_4 - y_1 = y_3 - y_2$ und $y_2 - y_1 = y_3 - y_4 = 0$ werden

$$k = \frac{x_p - x_1}{\Delta x} \tag{5a}$$

und

$$l = \frac{y_p - y_1}{\Delta y} \tag{5b}$$

erhalten. Damit stellen k und l die normierten Koordinaten des Punktes P_i im System der Masche dar. Bilinear steht folglich für ein zweistufiges lineares Vorgehen.

Für die Fälle $k < 0$ und $k > 1$ sowie $l < 0$ und $l > 1$ liegt P_i außerhalb der Masche und die Interpolation wird zu einer Extrapolation. Da dieses eintreten kann (und darf), wird neutral von einer Filteraufgabe gesprochen. Der Parameter l teilt die Verbindungsgeraden $\vec{P}_1\vec{P}_4$ und $\vec{P}_2\vec{P}_3$ im gleichen Verhältnis und führt auf die Punkte $Q_1(P_i)$ und $Q_2(P_i)$ gemäß Abb. 1 und Abb. 2. Wie später gezeigt, darf die Masche auch als ein Dreieck verstanden werden.

Mit der Routine *fsolve* in Matlab (siehe https://de.mathworks.com) ist eine leicht zu programmierende Möglichkeit gegeben, das Gleichungssystem (4) auch für ein beliebiges Viereck (oder Dreieck) nach den beiden Unbekannten k und l aufzulösen und damit die Hilfspunkte

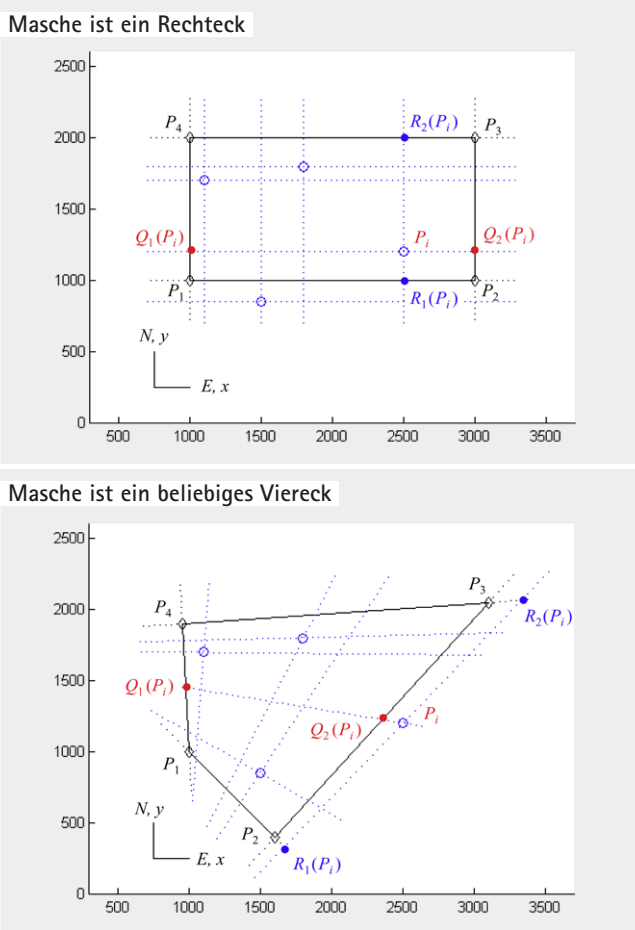


Abb. 2: Beschreibung eines Punktes P_i über normierte Koordinaten k,l

R_1, R_2, Q_1 und Q_2 angeben zu können. Dazu ist (4) als Funktion F mit den beiden Unbekannten $x = [k \;\; l]$ zu vereinbaren, für die mit $x0 = [0 \;\; 0]$ Startwerte vorzugeben sind. Mit dem Funktionsaufruf $x = fsolve(F, x0)$ wird dann mittels des Newton-Raphson-Verfahrens für die Funktion F iterativ die Lösung für die Unbekannten gefunden. Eine eigenständig zu implementierende inkrementelle Näherungslösung zur flächenhaften bilinearen Interpolation, wie z. B. bei Behr und Lutz (1989) beschrieben, ist damit nicht erforderlich.

Bezeichnet $f(u)$ die zu filternde Funktion, die in den Stützpunkten durch die Shiftwerte

$$\boldsymbol{u}^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4] \tag{6}$$

gegeben ist, so resultiert mit den in einem Vektor $\boldsymbol{a}$

$$\boldsymbol{a} = [(1-k)\cdot(1-l) \quad k\cdot(1-l) \quad k\cdot l \quad (1-k)\cdot l] \tag{7}$$

zusammengefassten normierten Koordinaten k und l für den gesuchten Wert des Punktes P_i

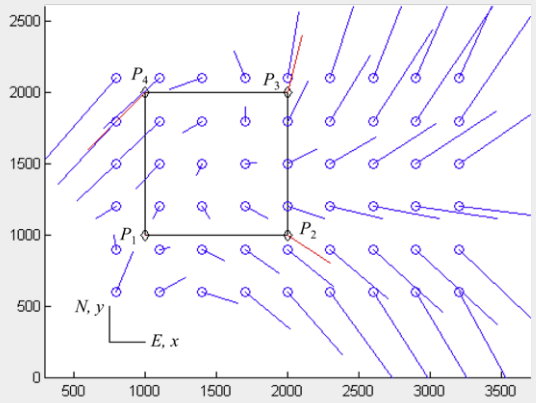
$$u_p = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u} \,. \tag{8}$$

Setzt man zur Kontrolle in (7) $k = l = 0$, erhält man für den Eckpunkt P_1 den Funktionswert u_1 und entsprechend

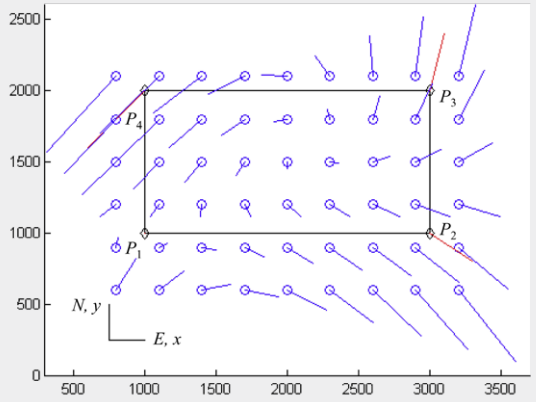
für $k = l = 1$ den Funktionswert u_3. $k = 1$ und $l = 0$ bringt als Ergebnis u_2, $k = 0$ und $l = 1$ liefert u_4.

Die Wirkungsweise der bilinearen Filterung wird mit einem simulierten Beispiel gezeigt. Die Masche ist durch die Stützpunkte P_1 bis P_4 gegeben, für die auch Shiftwerte $\boldsymbol{u}_x$ und $\boldsymbol{u}_y$ vorliegen. Für die Beträge dieser Werte ist willkürlich angenommen $\vec{u}_1 = 0{,}000$ m, $\vec{u}_2 = 0{,}361$ m, $\vec{u}_3 = 0{,}421$ m und $\vec{u}_4 = 0{,}566$ m. Siehe die roten Vektoren in der Abb. 3, die gegenüber dem Maßstab der Koordinaten 1000-fach vergrößert dargestellt sind. Für die Verschiebungen der Objektpunkte ist (8) separat für jede Koordinatenrichtung anzuwenden, um $\boldsymbol{u}_P^T = \begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix} \; \forall\, i$ zu ermitteln. Die an die neue Situation anzupassenden Objektpunkte sind für das Simulationsbeispiel rasterförmig angeordnet. Ihre sich ergebenden Verschiebungen sind in blau wiedergegeben. Je nach Anordnung der Stützpunkte als Quadrat, als Rechteck oder als beliebiges Viereck liegen die Punkte P_i inner- oder außerhalb der Masche.

Stützpunkte bilden ein Quadrat



Stützpunkte bilden ein Rechteck



Stützpunkte bilden ein beliebiges Viereck

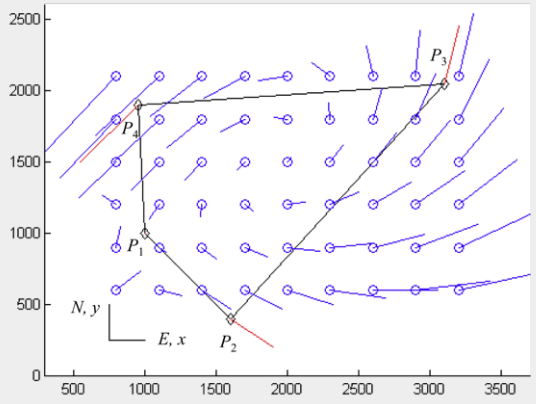


Abb. 3: Simulationsbeispiel zur bilinearen Filterung

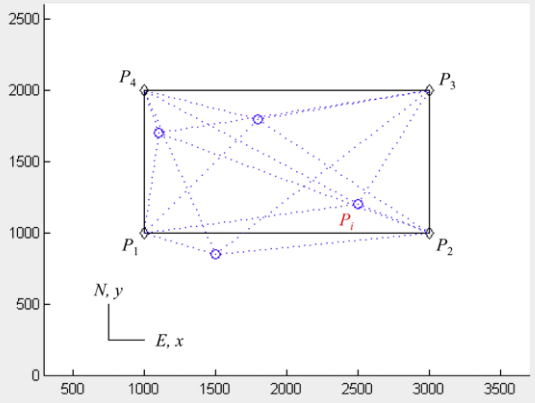
3 Filterung über Funktionen des Abstands

Von den vielen in der Literatur bekannten Ansätzen zur nachbarschaftstreuen Anpassung, z. B. bei Gielsdorf und Gründig (1997) auf der Basis der elasto-mechanischen Analogie eines Membranmodells oder der maschenweisen Affintransformation (Niemeier 2008), sind im Folgenden die Filterung über Abstandsgewichte (Abschnitt 3.1) und die multiquadratische Filterung (Abschnitt 3.2) für den Vergleich mit der bilinearen Filterung herangezogen. Beide Ansätze basieren darauf, dass ein Punkt P_i über seine Abstände s_{ij} zu den j Stützpunkten beschrieben wird:

$$\boldsymbol{s}_i = \begin{bmatrix} s_{i1} & s_{i2} & s_{i3} & s_{i4} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Aus Gründen der Gegenüberstellung mit der bilinearen Filterung wird im Folgenden von $q = 4$ Stützpunkten ausgegangen, siehe Abb. 4.

Verteilung der Stützpunkte als Rechteck



Verteilung der Stützpunkte als beliebiges Viereck

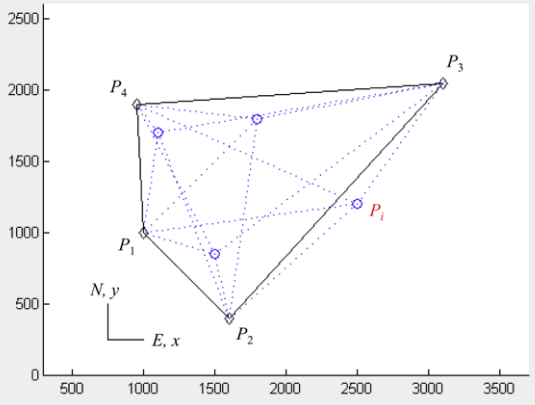


Abb. 4: Beschreibung eines Punktes P_i über Abstände s_{ij}

3.1 Filterung über Abstandsgewichte

Zur Ermittlung eines Abstandsgewichtes von P_i zu einem Stützpunkt P_j ist zu bilden (Niemeier 2008):

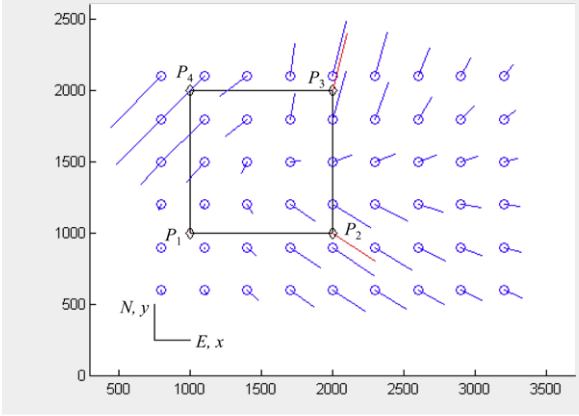
$$p_{ij} = \left(s_{ij} + H\right)^{-h}, \tag{10}$$

ohne dass eine Vermaschung der Stützpunkte erforderlich ist. Ein additiver Faktor $H > 0$ [m] ist aus Gründen der Regularisierung vorzusehen, da andernfalls mit $h \geq 1$ für das deckungsgleiche Zusammenfallen eines Objektpunktes mit einem Stützpunkt kein (endliches) Gewicht p_{ij} gebildet werden kann. Für ein kleines $H > 0$ wird das Gewicht eines nahe eines Stützpunktes liegenden Punktes P_i groß gegenüber den anderen Gewichten, sodass für einen solchen Punkt de facto der Shiftwert des naheliegenden Stützpunktes erhalten wird. Mit dem Exponenten $h = 1$ gehen die Gewichte mit dem Kehrwert linear mit den Abständen s_{ij} ein, mit $h = 2$ quadratisch im Kehrwert. Neben (10) existieren auch weitere Modellierungen der Abstandsgewichte, z. B. als abfallende Exponentialfunktion. Die Art und Weise der Bestimmung der Abstandsgewichte p_{ij} trägt somit ein subjektives Moment. Für den gesuchten Wert des Punktes P_i resultiert als gewichtetes Mittel der Shiftwerte in den Stützpunkten P_j:

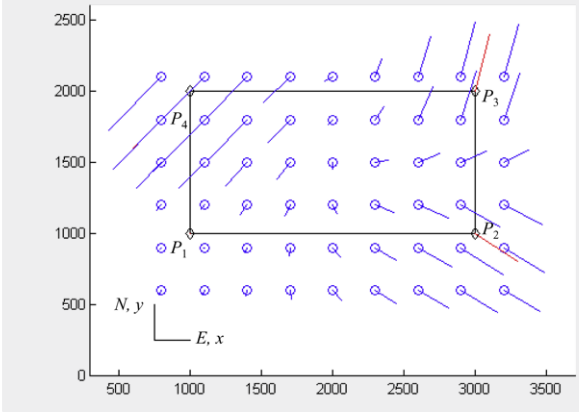
$$u_p = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} p_{ij}} \sum_{j=1}^{m} \left(p_{ij} u_j\right). \tag{11}$$

Mit den gesetzten Parametern $H = 0{,}01$ m und $h = 1$ in (10) ergibt sich für das Simulationsbeispiel das mit der Abb. 5 wiedergegebene Ergebnis.

Stützpunkte bilden ein Quadrat (H = 0,01; h = 1)



Stützpunkte bilden ein Rechteck (H = 0,01; h = 1)



Stützpunkte bilden ein beliebiges Viereck (H = 0,01; h = 1)

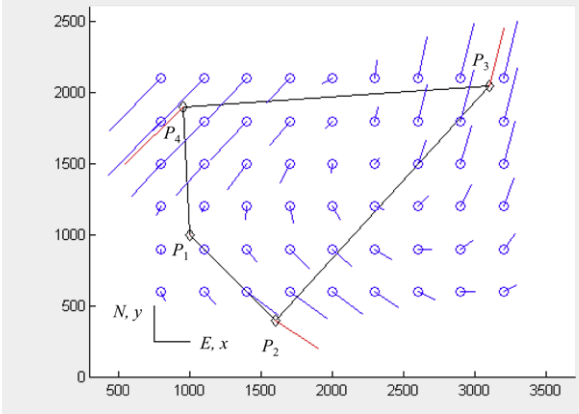


Abb. 5: Simulationsbeispiel zur Filterung über Abstandsgewichte

3.2 Multiquadratische Filterung

Bei der multiquadratischen Filterung – auch als multiquadratische Methode (Göpfert 1977), multiquadratische Analyse (Hardy 1972) oder multiquadratische Interpolation (Wieser et al. 2003, Niemeier 2008) bezeichnet – handelt es sich um ein Verfahren basierend auf der Überlagerung von q Flächen 2. Grades, also Hyperboloiden. Grundgedanke ist, dass sich eine unregelmäßige Fläche durch Summation kleiner, regelmäßiger Flächen approximieren lässt (Hardy 1972). Für einen Punkt P_i ist der Vektor der Abstände zu den Stützpunkten in Erweiterung von (9) unter optionaler Einführung eines additiven Glättungsparameters G [m²] zu bilden:

$$s_{ij} = \sqrt{\left(x_j - x_i\right)^2 + \left(y_j - y_i\right)^2 + G}\,; \quad j = 1, \ldots, q\,. \tag{12}$$

Die Elemente S_{kl} zur Beschreibung der Regelflächen sind die Abstände zwischen den Stützpunkten P_k und P_l, die ebenfalls um G erweitert werden:

$$S_{kl} = \sqrt{\left(x_l - x_k\right)^2 + \left(y_l - y_k\right)^2 + G}\,. \tag{13}$$

Eine Glättung bedeutet, dass den Funktionswerten in den Stützpunkten eine Unsicherheit zugebilligt wird. Dies approximiert der Verlauf der Funktion in der Nachbarschaft der Stützpunkte und den Stützpunkten selbst. Nur für $G = 0$ ist der Ansatz frei von einer subjektiven Manipulation durch G und in den Stützpunkten werden die exakten Werte der Funktion $f(u)$ erhalten.

Die Kernfunktionsmatrix ist

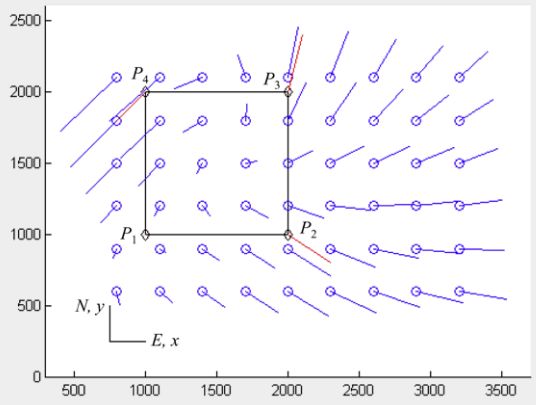
$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{G} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & \sqrt{G} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & \sqrt{G} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & \sqrt{G} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Für die Kernfunktionsmatrix gilt für jedes $G \geq 0$ für den Rang $rg(\boldsymbol{S}) = q$ und die Determinante $\det(\boldsymbol{S}) < 0$, sie ist negativ definit und invertierbar $\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{E}$. Mit dem Vektor $\boldsymbol{u}$ der Funktionswerte von $f(u)$ in den Stützstellen (6) wird für den gesuchten Wert des Punktes P_i

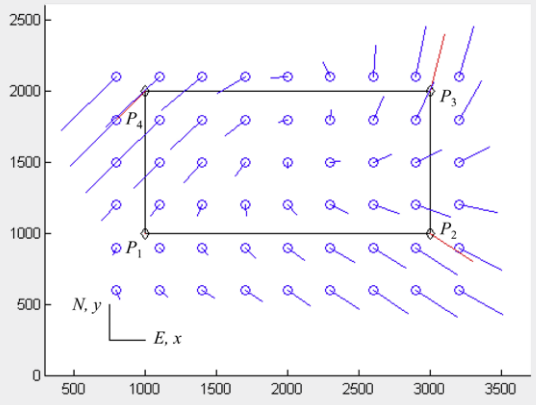
$$u_p = \boldsymbol{s}_i \cdot \boldsymbol{S}^{-1} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{s}_i \cdot \boldsymbol{c} \quad (15)$$

berechnet. Zweckmäßigerweise wird für eine Filteraufgabe der Spaltenvektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{S}^{-1} \cdot \boldsymbol{u}$ einmal bestimmt und dann auf die veränderlichen Abstände $\boldsymbol{s}_i$ nach (12) bezüglich eines jeden Punktes P_i angewendet. Die Abb. 6 zeigt mit dem gewählten Parameter $G = 0$ die resultierenden Verschiebungsfelder der Objektpunkte für das Simulationsbeispiel bei den drei unterschiedlichen Anordnungen der Stützpunkte P_1 bis P_4.

Stützpunkte bilden ein Quadrat ($G = 0$)



Stützpunkte bilden ein Rechteck ($G = 0$)



Stützpunkte bilden ein beliebiges Viereck ($G = 0$)

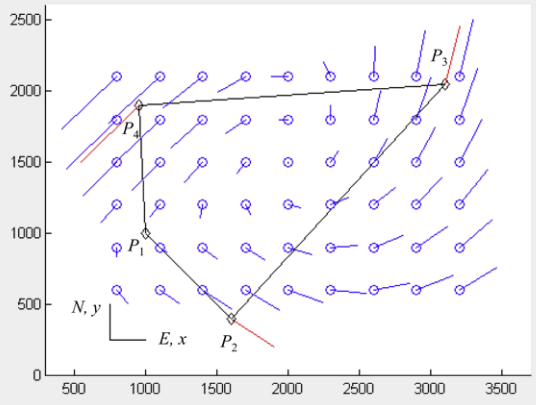


Abb. 6: Simulationsbeispiel zur multiquadratischen Filterung

4 Vergleich der Filterlösungen

Beim Betrachten der Filterlösungen der Abb. 3, 5 und 6 fällt auf, dass eine große Ähnlichkeit der Verschiebungsvektoren innerhalb der jeweiligen Maschen, d. h. bei der Interpolation, gegeben ist und dass es bei Extrapolationen mit zunehmendem Abstand zu den Randlinien einer Masche zu zum Teil sehr deutlichen Abweichungen kommt. Zur Quantifizierung wird die Standardabweichung der Abweichungen zwischen je zwei Lösungen ermittelt

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(|\vec{u}|'_p - |\vec{u}|_p\right)^2}\ [\mathrm{m}], \quad (16)$$

wobei hier nur die Punkte P_i einbezogen werden, die innerhalb einer Masche liegen. Die Angaben der Tab. 1 zu den Standardabweichungen haben also nur für die interpolierten Punkte des Simulationsbeispiels Gültigkeit und dienen allein dem Vergleich der Beispiellösungen.

Neben den in den Abb. 3, 5 und 6 grafisch wiedergegebenen Lösungen wurden bei der Filterung über Abstandsgewichte auch eine Lösung mit $H = 0{,}01$ m und $h = 2$ sowie bei der multiquadratischen Filterung eine Lösung mit $G = 100.000\ \mathrm{m}^2$ erzeugt. Die letztere Wahl von G ist in etwa orientiert an der Empfehlung von Göpfert (1977) für

Tab. 1: Vergleich der Standardabweichungen der betrachteten Lösungen

	Filterung über Abstandsgewichte		Multiquadratische Filterung	
	$H = 0{,}01$; $h = 1$	$H = 0{,}01$; $h = 2$	$G = 0$	$G = 100.000$
Bilineare Filterung	0,049 m	0,116 m	0,013 m	0,022 m
$H = 0{,}01$; $h = 1$	–	0,079 m	0,045 m	0,030 m
$H = 0{,}01$; $h = 2$		–	0,117 m	0,099 m
$G = 0$			–	0,020 m

diesen Parameter mit $G = 0{,}6 \cdot s^2_{kl,\min}$ bei der Interpolation von Isohypsen (vgl. auch Wieser et al. 2003). Beineke wählt für seine Interpolationsaufgabe der Modellierung von Kartenverzerrungen $G = 10^{-6}$, also $G \approx 0$.

Am besten passt das Ergebnis der bilinearen Filterung mit der Lösung der multiquadratischen Filterung bei Verwendung von $G = 0$ zusammen. In der Tat sind die Elemente der Zeilenvektoren $\boldsymbol{a}$ aus (7) und $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{s}_i \cdot \boldsymbol{S}^{-1}$ aus (15) dann bei der Interpolation nahezu identisch. Die Lösung über Abstandsgewichte mit dem Exponenten $h = 2$ weicht deutlich von den anderen Lösungsvarianten des Beispieldatensatzes ab. Nimmt man den Bereich der Extrapolation, weicht die Lösung durch bilineare Filterung von den anderen Lösungen zum Teil erheblich ab und gibt, wenn man z. B. den südöstlichen Bereich betrachtet, kaum mehr plausible Koordinatenverschiebungen für eine nachbarschaftstreue Anpassung. Extrapolationen sollten bei Anwendung der bilinearen Filterung daher möglichst vermieden werden, wenn man diese Erkenntnis verallgemeinert.

Der Algorithmus der bilinearen Filterung kann auch dann angewendet werden, wenn nur drei Stützpunkte vorliegen. Formal ist dann ein Punkt mit Doppelkoordinaten zu führen. Die Abb. 7 zeigt exemplarisch die k- und l-Hilfslinien bei der Ermittlung der Objektpunkte in einem Dreieck. Damit ergibt sich die Möglichkeit der

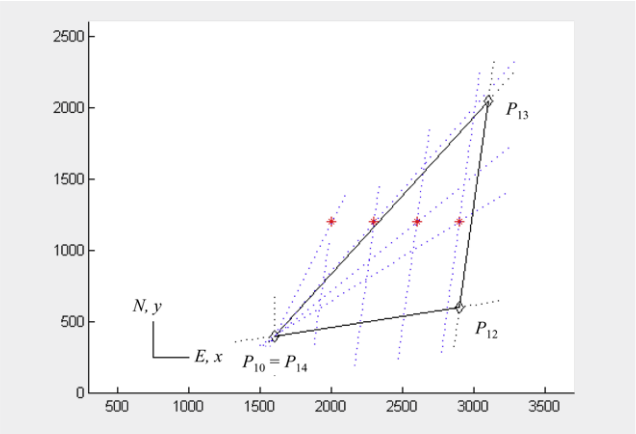


Abb. 7: Beschreibung von exemplarischen Punkten über k- und l-Linien im Dreieck

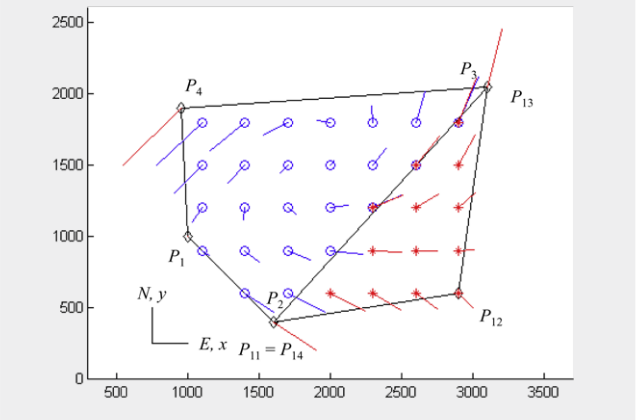


Abb. 8: Bilineare Filterung mit maschenweiser Lösung

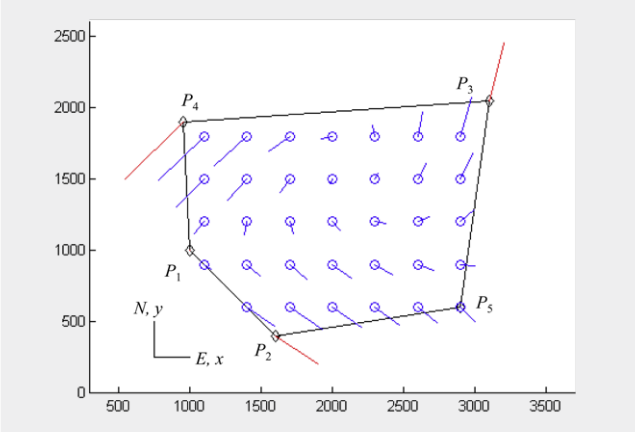


Abb. 9: Multiquadratische Filterung ($G = 0$) im Vergleich zur maschenweisen Lösung mittels bilinearer Filterung nach Abb. 8

Vermaschung eines Stützpunktfeldes, wie es die Abb. 8 andeutet. Die Verschiebungen zur Anpassung der Koordinaten der Objektpunkte sind dabei innerhalb der jeweiligen Masche gebildet. Ein stetiger Übergang an den Randlinien zwischen zwei Maschen bleibt gewahrt. Zum Vergleich ist mit der Abb. 9 das Ergebnis wiedergegeben, wie man es bei Anwendung der multiquadratischen Filterung mit dem Parameter $G = 0$ erhält. Praktischer Vorteil dieses Verfahrens ist, dass keine Vermaschung und Zuordnung von Objektpunkten zu den einzelnen Maschen erforderlich ist.

5 Nachbarschaftstreue Anpassung von Sondernetzen

Insbesondere mit dem Ziel einer effizienten Geodatennutzung hat die Arbeitsgemeinschaft der Vermessungsverwaltungen der Länder der Bundesrepublik Deutschland (AdV) im Zuge der deutschen Wiedervereinigung und der wachsenden europäischen Integration die Einführung des Bezugssystems ETRS89 mit der UTM-Abbildung beschlossen. Der Bezugssystemwechsel ist in fast allen Bundesländern zwischenzeitlich vollzogen bzw. steht unmittelbar bevor. Die amtlichen Geobasisdaten AFIS, ALKIS und ATKIS, die zugleich den Bezugsrahmen für andere Datenbestände der GDI-DE respektive von INSPIRE vorgeben, liegen damit bundesweit im Koordinatenreferenzsystem ETRS89/UTM vor (vgl. AdV 2014). Alle geodatenhaltenden Stellen der öffentlichen Verwaltung sind verpflichtet, diesen amtlichen geodätischen Raumbezug anzuwenden und ihre Geofachdaten auf der Grundlage der amtlichen Geobasisdaten zu erfassen und zu führen.

In der Folge des Bezugssystemwechsels werden Strecken gegenüber ihren entsprechenden Werten in der Örtlichkeit in den meisten Regionen Deutschlands deutlich stärker maßstäblich verzerrt werden, als dies bei den bisher verwendeten Gauß-Krüger-Koordinaten der Fall war. Handelt es sich bei S_H um eine elektrooptisch gemessene, in die Horizontale reduzierte Strecke im mittleren

Geländeniveau, liegt diese bei geprüften bzw. zertifizierten Messgeräten nach dem Anbringen der erforderlichen von Korrektionen als Strecke mit dem Maßstab $m = 1$ im internationalen Meter vor. UTM-Koordinaten mit E als Ostwert und N als Nordwert gelten für eine Höhe $h_{ell} = 0$ m bezogen auf das Bezugsellipsoid GRS80, sodass in der Örtlichkeit vorliegende Horizontalstrecken bei $h_{ell} > 0$ zu verkürzen sind. Mit im Allgemeinen hinreichender Genauigkeit beträgt die Höhenreduktion

$$S_{ell} = S_H \cdot \left(1 - \frac{h_{ell}}{R_B}\right) = S_H \cdot m_H = S_H \cdot \left(1 + \varepsilon_H\right). \qquad (17)$$

Darin bezeichnen $h_{ell} = \frac{1}{2}\left(h_1 + h_2\right)$ die mittlere ellipsoidische Höhe der beiden Endpunkte der Strecke und R_B den Radius der Gauß'schen Schmiegungskugel. Für die Abbildungsreduktion bei der UTM-Abbildung gilt mit im Allgemeinen ausreichender Näherung (vgl. Schödlbauer 1981)

$$S_{UTM} = S_{ell} \cdot m_0 \cdot \left(1 + \frac{y_m^2}{2 \cdot m_0^2 \cdot R_B^2}\right) = S_{ell} \cdot m_{UTM}, \qquad (18)$$

mit $y_m = E_m - 500.000$ [m] als dem von dem Offset und der vorgestellten Zonenziffer befreiten mittleren Ostwert $E_m = \frac{1}{2}\left(E_1 + E_2\right)$, d. h. dem mittleren Abstand vom Bezugsmeridian. Der Abbildungsmaßstab für den Bezugsmeridian ist bei der UTM-Abbildung mit $m_0 = 0{,}9996$ ($\triangleq -4$ cm/100 m) festgelegt (elliptischer Schnittzylinder), während dieser bei der Gauß-Krüger-Abbildung in Deutschland zu $m_0 = 1$ gesetzt war (elliptischer Berührzylinder). Zusammengefasst führt dies auf eine gegenüber der Örtlichkeit veränderte Strecke

$$S_{UTM} = S_H \cdot m_H \cdot m_{UTM} = S_H \cdot m_P \qquad (19)$$

in der Abbildungsebene, mit m_P als dem von h_{ell} und y_m abhängigen Maßstabsfaktor $m_P = m_H \cdot m_{UTM}$. Für ein nicht zu großes und in den Höhen stark variierendes Mess- bzw. Projektgebiet kann m_P für die meisten Anwendungen als konstant angenommen werden (vgl. Heunecke 2017). Die Abb. 10 zeigt exemplarisch Maßstabsfaktoren m_P, wie sie sich bei Gauß-Krüger- und UTM-Koordinaten bei ellipsoidischen Höhen von 300 m und 600 m ergeben. Für $h_{ell} = 0$ m gelten die gepunkteten Linien. Der grau hinterlegte Bereich besagt, dass die aus m_P resultierenden Effekte kleiner als 1 cm auf 100 m bleiben. Man sieht, dass dies praktisch durchgehend bei Gauß-Krüger-Koordinaten der Fall gewesen ist und erklärt, warum Abweichungen zwischen einer Strecke in der CAD-gestützten Planung und der Örtlichkeit so gering sind, dass dies für die Praxis im Allgemeinen vernachlässigt wurde. Bedingt durch den Bezugssystemwechsel ist die neue Situation, dass in Gebieten nahe der Bezugsmeridiane und mit größeren Höhen über NHN Maßstabsfaktoren bis zu $m_P \approx 0{,}99945 = -5{,}5$ cm/100 m auftreten können. Der Maßstabseffekt erreicht somit eine Größenordnung, die

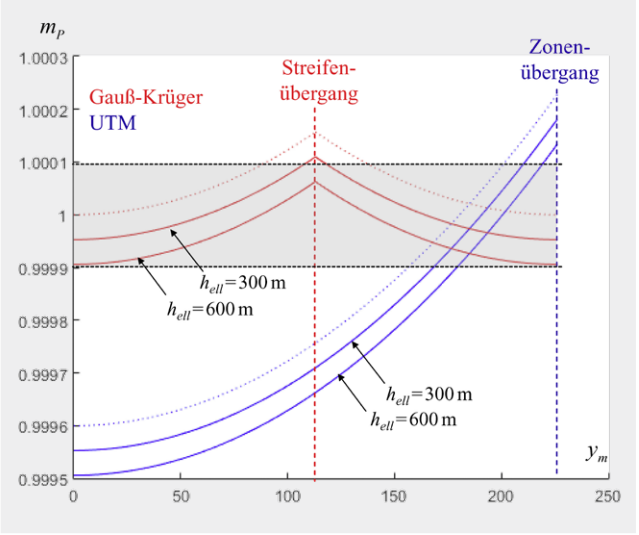


Abb. 10: Maßstabsfaktoren m_P für GK- und UTM-Koordinaten bei exemplarischen Höhen über dem Ellipsoid

je nach Lage des Projektgebietes für eine plangerechte Bauausführung von erheblicher Relevanz sein kann. Der Radius eines Bogens bei einer Trassierung ändert sich beispielsweise, wenn man $r = 1.000$ m als Soll in der Örtlichkeit annimmt im Maximalfall zu $r_{UTM} = 999{,}45$ m in der Projektion und damit im Planwerk.

CAD-gestützte Planungen von Bauwerken, z. B. bei Brücken, erfolgen regelmäßig in lokalen kartesischen Rechtssystemen mit einem Maßstab, welcher per definitionem der internationalen Meterfestlegung entspricht. Ziel der Umsetzung einer Planung muss es sein, ein Sollmaß S unverzerrt in die Örtlichkeit zu übertragen, insbesondere bei Bauwerken, wo die Konstruktionsmaße unverändert bleiben müssen und enge Toleranzvorgaben einzuhalten sind. Die einfachste Form, dies zu erreichen, ist die Anlage eines Sondernetzes mit dem Maßstab $m = 1$. Methodisch gesehen entspricht dies einer Kongruenztransformation (zwei Translationen, eine Rotation) bei der Absteckung der Koordinaten. Die Rotation resultiert aus dem Bezug zu Gitternord der amtlichen Koordinaten bei der Absteckung und der gebräuchlichen Ausrichtung der CAD-Koordinaten zu den Hauptachsen des Bauwerks.

Eine Ähnlichkeitstransformation, wie sie bei der Freien Stationierung üblicherweise zur Anwendung kommt, würde dazu führen, dass sich der Maßstab der Planung dem Maßstab m_P anpasst, wie er sich durch die verwendeten, in AFIS dokumentierten Festpunkte ergibt. Ein Sondernetz mit $m = 1$ führt allerdings dazu, dass die Nachbarschaft zu Objekten, die in den amtlichen Basisdatenbeständen dokumentiert und ggf. für die Baumaßnahme zu beachten sind (z. B. Grenzabstände, Zwangspunkte), gestört wird. Dies muss hingenommen werden, wenn die durch einen Projektmaßstab m_P hervorgerufenen Verzerrungen so groß werden, dass Toleranzen bei der Bauausführung sonst nicht eingehalten werden können.

Die Anlage eines Sondernetzes mit dem Maßstab $m = 1$ für ein Ingenieurbauwerk und daneben amtlichen Koordinaten für den Gesamtverlauf einer Trasse, in welche

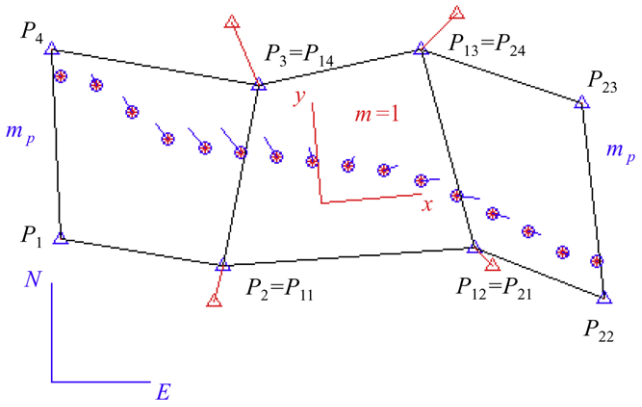


Abb. 11: Nachbarschaftstreue Anpassung eines Sondernetzes

das Bauwerk eingebunden ist und die unter Nutzung der Geobasisdaten entworfen wurde, führt zu gewissen Unstetigkeiten an den Übergangsstellen, insbesondere, wenn diese in Bereichen von Bögen und Klothoiden liegen. Hier bietet die bilineare Filterung eine zweckmäßige und leicht zu standardisierende Möglichkeit der nachbarschaftstreuen Anpassung. Die Gedanken sind mit der Abb. 11 skizziert. Mit Anschluss an die Festpunkte P_{11}, P_{12}, P_{13} und P_{14} wird in der Örtlichkeit ein Sondernetz x,y angelegt. Das Ingenieurbauwerk liegt innerhalb der durch diese Festpunkte gebildeten Masche. Bedingt durch die Kongruenztransformation, um den Maßstab $m = 1$ der Planung zu erhalten, kommt es zu den in rot dargestellten Restklaffen an den Festpunkten P_{11}, P_{12}, P_{13} und P_{14}. Mit den weiteren trassenbegleitenden Festpunkten P_1, P_4, P_{22} und P_{23} lassen sich in der Abb. 11 im westlichen und östlichen Bereich zwei Maschen bilden, innerhalb derer der Maßstab von $m = 1$ auf den in diesem Gebiet gegebenen Maßstab m_P angepasst wird. Es resultieren die in blau dargestellten Verschiebungsbeträge für die Koordinaten im Trassenverlauf. In den Übergangsbereichen werden also auch die Trassierungselemente (geringfügig) verändert, u. a. werden Geraden zu Kurven. Es steht der Anwendung frei, wie groß die beiden an das Sondernetz anschließenden Maschen sind, um den Maßstabsübergang zu gestalten.

6 Fazit

Vorzüge der bilinearen Filterung sind:

- Leicht nachvollziehbarer, geometrisch begründbarer und etablierter mathematischer Ansatz,
- Möglichkeit der Vermaschung in einem Stützpunktfeld entsprechend der Abb. 8,
- Möglichkeit der einfachen Integration in vorhandene Software-Infrastrukturen (ggf. unter Einbindung eines Matlab Exe-Files, um die Routine *fsolve* nutzen zu können),
- Objektivität ohne Wahl weiterer Parameter oder Ansatzfunktionen.

Die bilineare Filterung erzeugt, wie die anderen Filterverfahren auch, mit den Shiftwerten der Stützpunkte eine eindeutige Lösung $f(u)$ für einen Punkt P_i. Die Richtigkeit der Shiftwerte in den Stützpunkten selbst ist daher vorab abzusichern (siehe z. B. Niemeier 2008, S. 371). Extrapolationen sollten bei der bilinearen Filterung gemieden werden, sodass auf eine Konfiguration zu achten ist, bei der die Stützpunkte die Objektpunkte umschließen. Das mit der Abb. 11 skizzierte Beispiel zeigt die nachbarschaftstreue Anpassung eines Sondernetzes an die umgebenden amtlichen Koordinaten im ETRS89/UTM. Solche Anpassungen haben bei Bauvorhaben durch den Bezugssystemwechsel und den damit verbundenen größeren Abweichungen von Strecken in der UTM-Abbildungsebene und der Örtlichkeit an praktischer Bedeutung gewonnen. Aufgrund der vorstehend genannten Vorzüge bietet sich die bilineare Filterung als standardisierter Ansatz für derartige Aufgaben an.

Literatur

ADV (Hrsg.): Bundeseinheitliche Transformation für ATKIS (BeTA2007). Version 1.5, 2012. www.adv-online.de/geodaetische-grundlagen/transformation/transformation-beta2007/.

ADV (Hrsg.): Richtlinie für den einheitlichen integrierten geodätischen Raumbezug des amtlichen Vermessungswesens in der Bundesrepublik Deutschland. 2014. www.adv-online.de/AdV-Produkte/Festpunkte/.

Behr, F., Lutz, S. (1989): Ein schneller Algorithmus zur bilinearen Interpolation in Ankerpunktnetzen. In: BuL, Heft 6, S. 222–229.

Beineke, D. (2007): Zur Bestimmung lokaler Abbildungsverzerrungen in Altkarten mit Hilfe der multiquadratischen Interpolationsmethode. In: avn, Heft 1, S. 19–27.

Fröhlich, H. (1987): Die Verteilung von Restklaffungen im Modell multiquadratischer Funktionen. In: Der Vermessungsingenieur, Heft 3, S. 117–119.

Gielsdorf, F., Gründig, L. (1997): Nachbarschaftstreue Anpassung auf Basis des Membranmodells. In: zfv, Heft 5, 122. Jg., S. 208–218.

Göpfert, W. (1977): Interpolationsergebnisse mit der multiquadratischen Methode. In: zfv, Heft 10, 102. Jg., S. 457–460.

Hardy, R. (1972): Geodetic applications of multiquadratic analysis. In: avn, Heft 10, S. 398–406.

Heunecke, O. (2017): Planung und Umsetzung von Bauvorhaben mit amtlichen Lage- und Höhenkoordinaten. In: zfv, Heft 3, 142. Jg., S. 180–187. DOI: 10.12902/zfv-0160-2017.

Niemeier, W.: Ausgleichungsrechnung. 2. Auf., Walter de Gruyter Berlin New York, 2008. ISBN 978-3-11-019055-7.

Schödlbauer, A.: Rechenformeln und Rechenbeispiele zur Landesvermessung (2 Hefte). Wichmann-Verlag, Karlsruhe, 1981.

Wieser, A., Lienhart, W., Brunner, F. (2003): Nachbarschaftstreue Transformation zur Berücksichtigung von Spannungen im amtlichen Festpunktfeld. In: VGI, Heft 2, S. 115–121.

Kontakt
Univ.-Prof. Dr.-Ing. Otto Heunecke
Universität der Bundeswehr München, Institut für Geodäsie
Werner-Heisenberg-Weg 39, 85577 Neubiberg
otto.heunecke@unibw.de

Dieser Beitrag ist auch digital verfügbar unter www.geodaesie.info.