

# Auswertung rechtsschief verteilter Messwerte

## Näherungsverfahren zur Parameterschätzung der Neville-Verteilung

Hubert Schmidt

### Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird die Neville-Wahrscheinlichkeitsverteilung vorgestellt, die sich zur Auswertung rechtsschief verteilter Messdaten besser eignet als die bei geodätischen Auswertungen üblicherweise verwendete symmetrische Normalverteilung. Aufwändig ist jedoch die erforderliche iterative Parameterschätzung der Neville-Verteilung. Anhand von Betondeckungsmessungen wird für die Praxis ein Näherungsverfahren zur Parameterschätzung vorgestellt, das mit einfachster Recherausstattung genutzt werden kann.

### Summary

*This paper deals with the Neville-probability distribution, which is more appropriate to evaluate statistically measured values with right (positive) skewness than the symmetrical normal distribution. An approximation procedure for the parameter estimation of the Neville-distribution will be presented.*

## 1 Einleitung

Bei geodätischen Auswertungen wird zumeist davon ausgegangen, dass die Messwerte einer Messgröße (Stichprobe einer Zufallsvariablen) der symmetrischen Normalverteilung folgen. Sind die Messwerte jedoch nach unten hin begrenzt, was insbesondere dann der Fall ist, wenn keine negativen Werte auftreten können, liegt meist eine rechtsschiefe Wahrscheinlichkeitsfunktion (positive Schiefe) zugrunde. Dies kann Messwerte betreffen, die bei Ingenieurvermessungen zur Qualitätsprüfung ermittelt werden. Beispielsweise sind die Messwerte der Druckfestigkeiten von Beton oder Mauerwerk rechtsschief verteilt. Die Beurteilung dieser Daten mithilfe der Normalverteilung würde unkorrekte Wahrscheinlichkeitsaussagen liefern. Nachfolgend wird die rechtsschiefe Neville-Verteilung vorgestellt, die sich zur Auswertung derartiger Messwerte in besonderem Maße eignet.

## 2 Neville-Verteilung

Die von Neville (1985, 1987a, 1987b) aufgrund von Untersuchungen zur Bruchzähigkeit von Stahl entwickelte rechtsschiefe Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzt nach Neville (1987a, Gl. (11)) die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \frac{\rho(x)^k}{1 + \rho(x)^k} = 1 - \frac{1}{1 + \rho(x)^k} \quad (1)$$

$$\text{mit } \rho(x) = \frac{x - \tau}{r}, \quad 0 \leq \rho(x) \leq \infty \quad (2)$$

im Geltungsbereich:  $\tau \leq x \leq \infty$  mit  $k > 0$  und  $\tau \geq 0$ . Die Differentiation von Gl. (1) liefert die Dichtefunktion

$$f_X(x) = \frac{k}{r} \cdot \frac{\rho(x)^{k-1}}{\{1 + \rho(x)^k\}^2} \quad (3)$$

- Der *Formparameter*  $k$  legt die Höhe und Schlankheit der Dichtefunktion fest.
- Der *Lageparameter*  $r$  ist der Median der Messungen  $(X - \tau)$  für alle Werte  $k$ , da sich mit  $r = x - \tau$  in Gl. (1) und Gl. (2) eingesetzt der Wert der Verteilungsfunktion zu  $F_X(r) = 0,5$  ergibt, was der Definition des Medians entspricht. Der Lageparameter legt den Maßstab der Verteilung fest, d. h. je größer der Abstand zwischen  $r$  und dem Nullpunkt der Neville-Verteilung ist, umso breiter ist die Dichtefunktion.
- Mit dem *Verschiebeparameter*  $\tau$  lässt sich der Nullpunkt der Neville-Verteilung nach rechts verschieben. Bei  $\tau = 0$  fällt der Nullpunkt der Neville-Verteilung mit dem Nullpunkt der Daten zusammen.

Im Gegensatz zu anderen Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist zur Berechnung der Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  keine Integration erforderlich. Man kann bei Kenntnis der Parameter die Wahrscheinlichkeiten berechnen, ohne auf tabellierte oder softwaremäßig vorgehaltene Quantile zurückgreifen zu müssen. Ebenfalls lässt sich bei vorgegebener Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha\%$  durch Umstellung der Gl. (1) das zugehörige Quantil  $x(\alpha\%)$  berechnen. Aus  $F_X(x) = \alpha$  folgt sofort

$$x(\alpha\%) = \tau + r \cdot \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^{1/k} \quad (4)$$

Für  $\alpha = 0,05$  (= 5%) und  $\alpha = 0,10$  (= 10%) ergeben sich die Quantile

$$x(5\%) = \tau + \frac{r}{19^{1/k}}, \quad (5)$$

$$x(10\%) = \tau + \frac{r}{9^{1/k}}. \quad (6)$$

Um den Einfluss der einzelnen Parameter zu verdeutlichen, werden in Abb. 1 bis Abb. 3 die durch Variation von jeweils einem der drei Parameter entstehenden unterschiedlichen Dichtefunktionen der Neville-Verteilung dargestellt.

- In Abb. 1 variiert der Lageparameter von  $r = 5$  bis  $r = 30$ . Mit zunehmendem Wert verflacht die Kurve und wird symmetrischer, d. h. je größer der Lageparameter ist, umso mehr nähert sich die Neville-Verteilung der Normalverteilung an.

- Mit der Variation des Formparameters  $k$  ändert sich die Höhe der Dichtefunktion (Abb. 2). Mit diesem Parameter kann der Grad der Rechtsschiefe der Neville-Verteilung gesteuert werden, so dass z. B. auch die Normalverteilung als ein möglicher Grenzfall angenähert werden kann.
- In Abb. 3 variiert der Verschiebeparameter  $\tau$ , bei unverändertem Abstand zwischen dem Nullpunkt und dem Lageparameter ( $r = 10$ ) der Neville-Verteilung.

Mit  $\tau = 0$  in Gl. (2) und durch Division mit dem Lageparameter  $r = X_M$  (Median) zeigt sich die Zufallsvariable  $X$  als normierte Zufallsvariable

$$Y = \frac{X}{X_M} \tag{7}$$

Mit der Dichtefunktion der Zufallsvariable  $Y$

$$f_Y(y) = k \cdot \frac{y^{k-1}}{(1+y^k)^2} \tag{8}$$

lassen sich deren Erwartungswert

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \frac{\mu_X}{X_M} = \int_0^\infty y \cdot f(y) \cdot dy \\ &\Leftrightarrow k \int_0^\infty \frac{y^k}{(1+y^k)^2} \cdot dy \\ &\Leftrightarrow B\left(\frac{k-1}{k}, \frac{k+1}{k}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{k}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\Gamma(2)} \\ &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{k \cdot \sin\left(\frac{\pi(k+1)}{k}\right)} \end{aligned}$$

und deren Varianz

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= \left(\frac{\sigma_X}{X_M}\right)^2 = E(Y^2) - \mu_Y^2 \\ &\Leftrightarrow \int_0^\infty y^2 \cdot f(y) \cdot dy - \mu_Y^2 \\ &\Leftrightarrow k \int_0^\infty \frac{y^{k+1}}{(1+y^k)^2} \cdot dy - \mu_Y^2 \\ &\Leftrightarrow B\left(\frac{k-2}{k}, \frac{k+2}{k}\right) - \mu_Y^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{\Gamma\left(\frac{k-2}{k}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{k+2}{k}\right)}{\Gamma(2)} - \mu_Y^2 \\ &\Leftrightarrow -\frac{2\pi}{k \cdot \sin\left(\frac{\pi(k+2)}{k}\right)} - \mu_Y^2 \end{aligned} \tag{10}$$

mithilfe der Betafunktion  $B(*,*)$  und der Gammafunktion  $\Gamma(*)$  herleiten. Somit können für unterschiedliche Werte  $k$  die Werte  $\frac{\mu_X}{X_M}$  der Gl. (9) und  $\frac{\sigma_X}{X_M}$  nach Gl. (10) ohne Integrationsrechnung ermittelt werden, siehe Tab. 1 und Tab. 2 Spalten 1 bis 3.

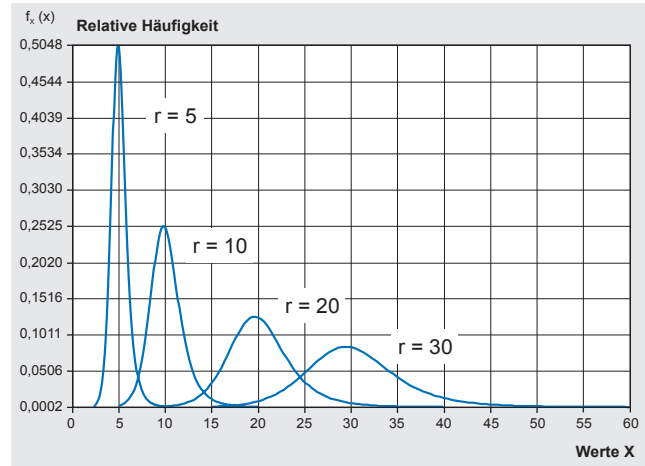


Abb. 1: Dichtefunktion der Neville-Verteilung bei Variation des Lageparameters  $r$  mit  $k = 10$  und  $\tau = 0$

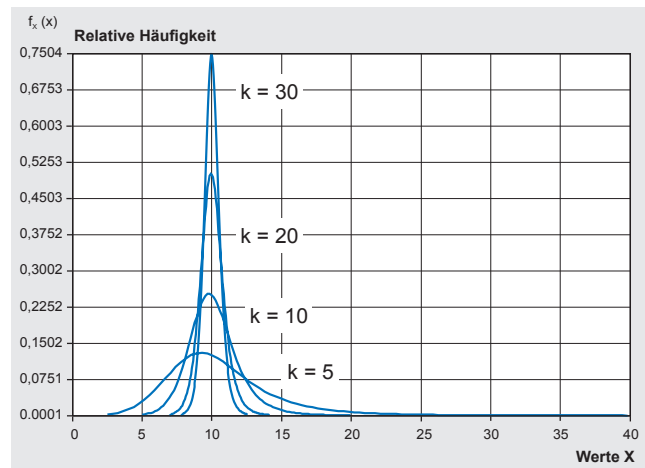


Abb. 2: Dichtefunktion der Neville-Verteilung bei Variation des Formparameters  $k$  mit  $r = 10$  und  $\tau = 0$

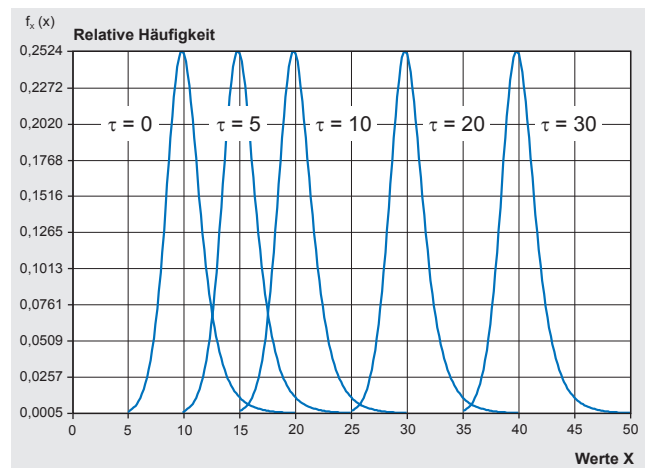


Abb. 3: Dichtefunktion der Neville-Verteilung bei Variation des Verschiebeparameters  $\tau$  mit  $r = 10$  und  $k = 10$

Aus den Gl. (9) und (10) lässt sich der Quotient

$$\frac{\mu_X}{\sigma_X} = \frac{\pi}{\sqrt{-\frac{2\pi \cdot k \cdot \sin^2\left(\frac{\pi(k+1)}{k}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(k+2)}{k}\right)} - \pi^2}} \tag{11}$$

bilden. Aus Gl. (11) zeigt sich für  $(\frac{\mu_X}{\sigma_X})^2$  der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow 2} \left( \frac{\mu_X}{\sigma_X} \right)^2 = 0. \tag{12}$$

Der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\frac{\mu_X}{\sigma_X}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} = 1,8138 \tag{13}$$

ist die Steigung der Asymptote von  $k$  zu  $\frac{\mu_X}{\sigma_X}$ .

Mit Gl. (11) sowie den Grenzwerten Gl. (12) und Gl. (13) lässt sich die funktionale Beziehung zwischen dem Formparameter  $k \geq 2,0$  und dem Quotienten  $\frac{\mu_X}{\sigma_X}$  als Hyperbelfunktion ableiten (Abb. 4) zu

$$\text{Formparameter } k = \sqrt{4 + \frac{\pi^2}{3} \cdot \left( \frac{\mu_X}{\sigma_X} \right)^2}. \tag{14}$$

Werte für den Quotient  $\frac{\mu_X}{\sigma_X}$  in Bezug zum Formfaktor  $k \geq 2$  sind in den Spalten 1 und 4 der Tab. 2 angegeben.

Im Prinzip ist die Parameterschätzung der Neville-Verteilung nur durch iterative Maximum-Likelihood-Schätzung (ML-Schätzung) möglich, was eine entsprechende Auswertesoftware und Rechnerausstattung verlangt. Die Hyperbelfunktion (14) ermöglicht es jedoch, nur mit den Schätzwerten  $\bar{x}$  und  $s$  anstelle von  $\mu_X$  und  $\sigma_X$  in Gl. (14) eingesetzt, eine genäherte Schätzung des Formparameters  $k$  zu bestimmen. Dieser genäherte Schätzwert stimmt mit dem ML-Schätzwert umso besser überein, je signifikanter die Messdaten Neville-verteilt sind.

Je kleiner der Formparameter  $k$  ist, umso flacher ist die Neville-Verteilung. Falls sich nach Gl. (14) ein Wert  $k < 3$  ergibt, sollte sicherheitshalber durch eine Klasseneinteilung mit Histogrammdarstellung überprüft werden, ob die zu approximierenden Daten wirklich einer rechtsschief weit auslaufenden Neville-Verteilung zugeordnet werden können oder sich mehr einer Gleichverteilung annähern. Auch im letzteren Fall lässt sich mit der Neville-Verteilung eine ausreichende Anpassung an die Daten erreichen. Jedoch sollte hierbei die Parameter-

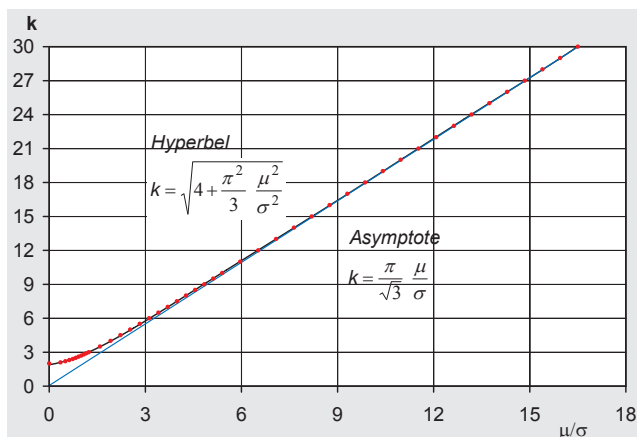


Abb. 4: Abhängigkeit des Formparameters  $k \geq 2$  vom

Quotient  $\frac{\mu_X}{\sigma_X}$

Tab. 1: Normierter Erwartungswert  $\frac{\mu_X}{X_M}$ , in Abhängigkeit vom Formparameter  $k = 1,0$  bis  $k = 2,0$

$k$	$\frac{\mu_X}{X_M}$
1,0	$\infty$
1,1	10,1372
1,2	5,2360
1,3	3,6443
1,4	2,8702
1,5	2,4184
1,6	2,1253
1,7	1,9213
1,8	1,7723
1,9	1,6591
2,0	$\pi/2$

Tab. 2: Normierter Erwartungswert  $\frac{\mu_X}{X_M}$ , normierte Standardabweichung  $\frac{\sigma_X}{X_M}$  und Quotient  $\frac{\mu_X}{\sigma_X}$  in Abhängigkeit vom Formparameter  $k \geq 2$

$k$	$\frac{\mu_X}{X_M}$	$\frac{\sigma_X}{X_M}$	$\frac{\mu_X}{\sigma_X}$
1	2	3	4
2,0	$\pi/2$	$\infty$	0
2,1	1,5002	4,2219	0,3553
2,2	1,4427	2,8383	0,5083
2,3	1,3951	2,2160	0,6296
2,4	1,3552	1,8438	0,7350
2,6	1,2923	1,4051	0,9197
2,8	1,2453	1,1486	1,0842
3,0	1,2092	0,9779	1,2366
3,5	1,1481	0,7234	1,5871
4,0	1,1107	0,5806	1,9131
4,5	1,0861	0,4880	2,2254
5,0	1,0690	0,4226	2,5292
6,0	1,0472	0,3355	3,1211
7,0	1,0344	0,2795	3,7004
8,0	1,0262	0,2402	4,2723
9,0	1,0206	0,2109	4,8395
10,0	1,0166	0,1882	5,4033
12,0	1,0115	0,1550	6,5246
15,0	1,0073	0,1229	8,1970
20,0	1,0041	0,0915	10,9720
25,0	1,0026	0,0730	13,7396
30,0	1,0018	0,0607	16,5036
$\infty$	1,0000	0,0000	$\infty$

schätzung durch ML-Schätzung erfolgen. Es können sich beispielsweise Werte für  $k$  im Bereich  $1 < k < 2$  ergeben (siehe Tab. 1), die mit Gl. (14) nicht berechenbar sind.

Falls die Histogrammdarstellung sogar eine mehrgipflige Verteilung erkennen lässt, sollte versucht werden, die Daten in entsprechende, den einzelnen Gipfeln zugeordnete Gruppen einzuteilen und diese Datengruppen jeweils durch separate Neville-Verteilungen zu approximieren. Weiteres hierzu in Abschnitt 3 und Abschnitt 5.2.

### 3 Auswertung von Betondeckungsmesswerten

Zur Erzielung einer ausreichenden Dauerhaftigkeit von Stahlbeton- und Spannbetonbauteilen ist die Einhaltung einer Mindestbetondeckung am fertigen Bauteil, d. h. die Einhaltung eines Mindestabstandes zwischen Betonoberfläche und den Bewehrungsstäben, von besonderer Bedeutung. Unbehandelter Stahl im Beton ist nur dann vor Korrosion geschützt, wenn die Betondeckung größer als die Karbonisierungstiefe bzw. die Chlorideindringtiefe ist.

Die auf die Betonoberfläche aufzusetzenden Betondeckungsmessgeräte arbeiten entweder nach dem magnetischen Wechselfeldverfahren unter Nutzung des Transformatorprinzips oder nach dem Wirbelstromverfahren, bei dem die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen einer Induktionsspule und dem im Bewehrungsstab induzierten Wirbelstrom ausgenutzt wird. Von Vorteil bei letztgenanntem Verfahren ist, dass sowohl der Bewehrungsdurchmesser unabhängig bestimmt werden kann, als auch nichtmagnetische metallische Bewehrungsstäbe geortet werden können.

Die Auswahl der Messflächen (z. B. Seitenflächen von Wänden, Ober- oder Unterseiten von Decken, Seitenflächen von Stützen, Stegseitenflächen oder Unterseiten von Balken) und die Auswahl der Messpunkte ist im DBV-Merkblatt »Betondeckung und Bewehrung«, Kap. A5, geregelt. Demnach werden auf einer Messfläche zunächst Messlinien so festgelegt, dass keine Fehlmessungen entstehen können. Auf diesen Messlinien sind die Messpunkte als Stichprobe zufällig und über die Messfläche möglichst weitgehend gestreut zu wählen. Die Anzahl der Messpunkte soll  $n \geq 20$  betragen.

An den einzelnen Messpunkten ist die jeweilige Betondeckung reproduzierbar konstant und nicht variabel. Die Variabilität ist allein durch das Messverfahren bedingt, wobei hier von gleicher Varianz  $\sigma^2$  an allen Messpunkten ausgegangen werden kann. Das bedeutet, an den einzelnen Messpunkten zeigen sich normalverteilte Zufallsvariable  $X_i$ , deren Erwartungswerte  $\mu_i$  unterschiedlich und deren Varianzen  $\sigma_i^2 = \sigma^2$  gleich sind, d. h.  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ . Werden alle Messwerte gemeinsam ausgewertet, liegt den Daten wegen der unterschiedlichen Erwartungswerte  $\mu_i$  keine Normalverteilung, sondern eine Mischverteilung zugrunde. Die Form ihrer Dichtefunktion weicht umso mehr von der Dichtefunktion der Normal-

verteilung ab, je größer die Unterschiede zwischen den Erwartungswerten  $\mu_i$  sind. Da die Betondeckung nach unten begrenzt ist, ergeben sich hier die Mischverteilungen der unterschiedlichen Messreihen der Betondeckung zu meist rechtsschief. Falls sich im Verlauf einer Messfläche Unstetigkeiten durch stufige, gekippte oder gekrümmte Verlegung der Bewehrungsstäbe zeigen, sodass die Erwartungswerte  $\mu_i$  der Zufallsvariablen  $X_i$  der Betondeckung nicht nahe beieinander, sondern unterschiedlich gruppiert sind, kann einer derartigen Messreihe sogar eine mehrgipflige Mischverteilung zugrunde liegen.

Für ein am Institut für Bauforschung der RWTH Aachen durchgeführtes Forschungsprojekt »Betondeckung – Planung und Abnahme« (Forschungsbericht Nr. F 728 vom 13.05.2002) standen Betondeckungsmessdaten von 15 verschiedenen Bauwerken (Hochbauten, Tunnel- und Brückenbauwerke) zur Verfügung. Es wurden ca. 800 Messreihen mit unterschiedlichen Anzahlen  $n$  von Messwerten (bis zu  $n = 1200$ , im Mittel ca.  $n = 200$  je Reihe) ermittelt.

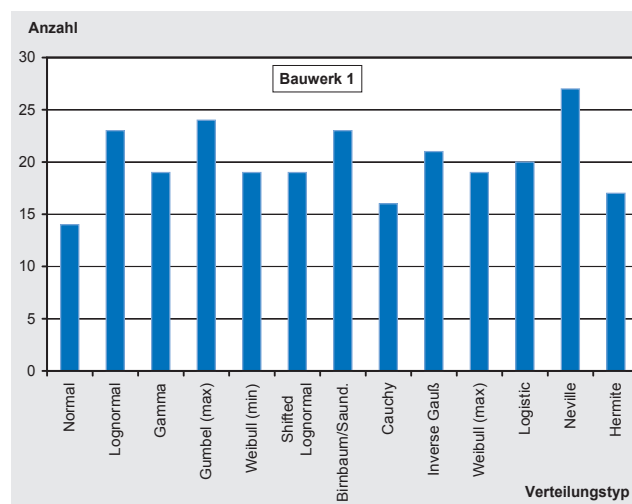


Abb. 5: Kolmogoroff-Smirnov-Test der Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Datenreihen des Bauwerks 1

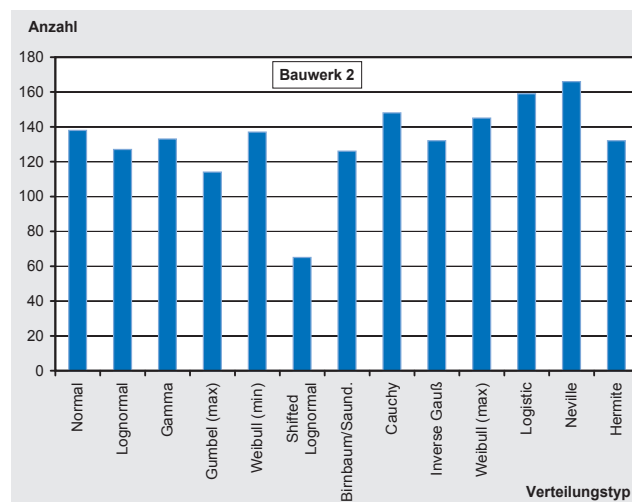


Abb. 6: Kolmogoroff-Smirnov-Test der Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Datenreihen des Bauwerks 2

Damit die den Messreihen zugrunde liegenden Mischverteilungen statistisch beurteilt werden können, müssen sie jeweils durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung approximiert werden. Es war zu untersuchen, ob sich zur Beurteilung der Betondeckungsmessungen insbesondere die Neville-Wahrscheinlichkeitsverteilung eignet (Brameshuber et al. 2004). Da die Schätzfunktionen der Neville-Verteilung die gesuchten Parameter implizit enthalten, ist nur deren iterative ML-Schätzung möglich.

Zur Parameterschätzung aller zu untersuchenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen wurde in diesem Forschungsprojekt das Programmpaket STRUREL eingesetzt, mit dem sich die Parameter als ML-Schätzung ermitteln lassen. Um die Güte der Anpassung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung an vorgegebene Datenreihen beurteilen zu können, wurde für die Datenreihen des Bauwerks 1 und für einen Teil der Datenreihen des Bauwerks 2 der Kolmogoroff-Smirnov-Anpassungstest für die gebräuchlichsten Wahrscheinlichkeitsverteilungen durchgeführt. Als Indiz für eine gute Anpassung der jeweils zu beurteilenden Wahrscheinlichkeitsverteilung wurde die Anzahl der Fälle ermittelt, in denen die Nullhypothese nicht verworfen wird (Abb. 5 und Abb. 6).

Die Daten des Bauwerks 1 weichen deutlich von der Normalverteilung ab. Sie sind rechtsschief und werden von der Neville-Verteilung deutlich besser als von allen anderen Verteilungen approximiert.

Die Daten des Bauwerks 2 sind genähert normalverteilt, so dass sie von mehreren Wahrscheinlichkeitsverteilungen in etwa gleich gut approximiert werden. Dass auch hier die Neville-Verteilung am besten approximiert, unterstreicht ihre hervorragende Anpassungsfähigkeit und Flexibilität. Außerdem beinhalten die meisten anderen Verteilungen negative Werte, was im Falle der Betondeckung technisch nicht möglich ist.

#### 4 Näherungsverfahren zur Parameterschätzung

Das nachfolgend vorgestellte Näherungsverfahren ist als Auswerteverfahren zum quantitativen Nachweis der ausreichenden Betondeckung in das DBV-Merkblatt »Betondeckung und Bewehrung«, Fassung Juli 2002, aufgenommen worden.

Aus den im Forschungsprojekt vorliegenden Messdaten zeigte sich, dass die Berücksichtigung eines Verschiebeparameters  $\tau \neq 0$  nicht erforderlich ist. Da die rechtsschiefe Verteilung links steiler abfällt, nehmen die Dichtewerte nach links hin rasch ab, so dass die Wahrscheinlichkeitswerte am linken Verteilungsrand nur unwesentlich beeinflusst werden. Die erste Festlegung ist folglich

$$\text{Verschiebeparameter } \tau = 0. \tag{15}$$

Der Lageparameter  $r$  entspricht bei streng Neville-verteilten Daten dem Median  $X_M - \tau$ , also  $X_M$  bei  $\tau = 0$ . Je nach Datenstruktur können sich jedoch Verschiebun-

gen der Neville-Verteilung ergeben, die sich bei den Wahrscheinlichkeitswerten der Randbereiche stark verfälschend auswirken können. Außerdem zeigte sich in wenigen Fällen der verfügbaren Messdaten des Forschungsprojektes sogar eine leichte linksschiefe Datenstruktur. Aufgrund empirischer Untersuchungen dieser Daten ergibt sich eine verbesserte Anpassung der Verteilung an die Daten, wenn zur Schätzung des Parameters  $r$  neben dem ermittelten Median  $\bar{x}_M$  das arithmetische Mittel  $\bar{x}$  als Korrektiv benutzt wird, so dass die zweite Festlegung lautet

$$\text{Lageparameter } r = \frac{\bar{x} + \bar{x}_M}{2}. \tag{16}$$

Die Form (Höhe und Schlankheit) einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist von der Lage und von der Größe des Streuverhaltens der Daten, mithin vom arithmetischen Mittel  $\bar{x}$  und von der Standardabweichung  $s$  abhängig. Mit  $\bar{x}$  und  $s$  anstelle von  $\mu_X$  und  $\sigma_X$  in Gl. (14) eingesetzt, ergibt sich als dritte Festlegung

$$\text{Formparameter } k = \sqrt{4 + \frac{\pi^2}{3} \cdot \left(\frac{\bar{x}}{s}\right)^2}. \tag{17}$$

Der Einfluss des Summanden „4“ in Gl. (17) auf das Ergebnis  $k$  nimmt mit steigenden Werten  $\bar{x}/s$  stetig ab und wirkt sich nur bei sehr kleinen Werten  $k$  merklich aus, so dass als Näherung an die Hyperbel mit Gl. (13) die Asymptotengleichung verwendet werden kann

$$\text{Formparameter } k = 1,8 \cdot \frac{\bar{x}}{s}. \tag{18}$$

Bei der Auswertung der Messwerte der Betondeckung erwies sich die Näherungsgleichung (18) als ausreichend genau, da sich die berechneten Formparameter zu  $k > 4$ , in den meisten Fällen im Bereich zwischen  $k = 8$  und  $k = 15$  oder größer ergaben. Den folgenden Erläuterungen zur praktischen Datenauswertung liegt Gl. (18) zugrunde.

#### 5 Auswertebispiel

- **Gegeben:** Betondeckungsmessung mit  $n = 58$  Messwerten, der Größe nach sortiert.
- **Forderung:** Mindestbetondeckung  $c_{min} = 40$  mm.
- **Beurteilungskriterium:** Die Ausführung der Betondeckung wird akzeptiert, wenn die Wahrscheinlichkeit der Unterschreitung der Mindestbetondeckung nicht größer als  $F_X(x = c_{min}) = 5\%$  der Neville-Verteilung ist.

Messwerte  $x_i = c_i$  [mm]:

37, 38, 41, 41, 43, 44, 45, 45, 45, 45, 45, 47, 47, 47, 47, 47, 47, 47, 48, 48, 49, 49, 49, 49, 49, 49, 49, 50, 51, 51, 51, 51, 52, 52, 53, 53, 54, 54, 54, 55, 55, 55, 56, 56, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 61, 63, 66, 69, 71, 74, 75, 75, 76.

### 5.1 Rechenschritte beim Näherungsverfahren

1. Median

$$\bar{x}_M = \frac{1}{2} (x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) = \frac{x_{29} + x_{30}}{2} = 51,0 \text{ mm}$$

2. Arithmetisches Mittel

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{58} x_i = \frac{3072}{58} = 52,97 \text{ mm}$$

3. Standardabweichung

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]} = 9,16 \text{ mm}$$

4. Lageparameter

$$r = \frac{\bar{x} + \bar{x}_M}{2} = \frac{52,97 + 51,0}{2} = 52,0 \text{ mm}$$

5. Formparameter

$$k = 1,8 \cdot \frac{\bar{x}}{s} = 1,8 \cdot \frac{52,97}{9,16} = 10,41$$

6. Zwischenwert  $\rho(x)$  mit  $x = c_{min} = 40 \text{ mm}$

$$\rho(x) = \frac{x}{r} = \frac{40}{52,0} = 0,7695$$

7. Verteilungsfunktion  $F_X(x)$

$$F_X(x) = \frac{\rho(x)^k}{1 + \rho(x)^k} = \frac{0,7695^{10,41}}{1 + 0,7695^{10,41}} = 6,1\%$$

8. Beurteilung: **Ablehnung**, da die maximal zulässige Wahrscheinlichkeit  $F_X(c_{min}) \leq 5\%$  überschritten wird.

9. Alternative Berechnung der Quantile  $x(5\%)$  und  $x(10\%)$ :

$$x(5\%) = \frac{r}{19^{1/k}} = \frac{52,0}{19^{1/10,41}} = 39,2 \text{ mm} \quad (19)$$

$$x(10\%) = \frac{r}{9^{1/k}} = \frac{52,0}{9^{1/10,41}} = 42,1 \text{ mm.} \quad (20)$$

Das 5%-Quantil liegt unterhalb und das 10%-Quantil oberhalb der Mindestbetondeckung  $c_{min} = 40 \text{ mm}$ , d. h. bei einem 10%-Kriterium würde die Ausführung der Betondeckung akzeptiert.

Wie der Vergleich der Ergebnisse der Näherungsberechnung und der ML-Parameterschätzung in Tab. 3 zeigt, führen beide Verfahren beim 5%-Kriterium zu einer formalen Ablehnung der Betondeckung.

Tab. 3: Vergleich der Näherungsberechnung und der ML-Parameterschätzung der Neville-Verteilung

	Näherungsverfahren	ML-Schätzung
Lageparameter	$r = 52,0 \text{ mm}$	$r = 51,7 \text{ mm}$
Formparameter	$k = 10,4$	$k = 11,0$
Verteilungsfunktion	$F_X(40 \text{ mm}) = 6,1\%$	$F_X(40 \text{ mm}) = 5,7\%$
Beurteilungskriterium	$F_X(c_{min}) \leq 5\%$	$F_X(c_{min}) \leq 5\%$
Beurteilung	Ablehnung!	Ablehnung!

### 5.2 Berücksichtigung eines oberen Grenzwertes $x_{OG}$ zur Datenanpassung

Wie in Abb. 7 ersichtlich, ist die Datenstruktur des Berechnungsbeispiels deutlich in zwei Blöcke gegliedert (zweigipflige Mischverteilung), die von einer eingipfligen Wahrscheinlichkeitsverteilung nur unzureichend approximiert werden kann. Sowohl die mit dem Näherungsverfahren als auch die durch ML-Schätzung berechneten Neville-Dichtefunktionen passen sich daher den Daten nicht optimal an, weil sich wegen der großen Standardabweichung der Daten in beiden Fällen die Dichtefunktionen sehr flach ergeben und weite Ausläufe haben. Wie am Ende von Abschnitt 2 bereits ausgeführt, entsteht die Mehrgipfligkeit durch zu große Differenzen zwischen den Erwartungswerten  $\mu_i$  der in die Mischverteilung einfließenden Normalverteilungen.

Die Aussagekraft statistischer Auswertungen wird umso größer, je besser sich die zugrunde gelegte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Grundgesamtheit der zu beurteilenden Messwertmenge anpasst. Beim quantitativen Nachweis der Betondeckung kommt es auf die gute An-

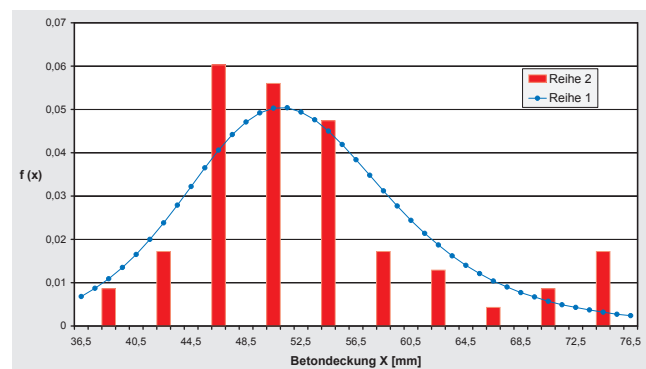


Abb. 7: Reihe 1 = Neville-Dichtefunktion ( $r = 52,0 \text{ mm}$ ,  $k = 10,4$ ); Reihe 2 = Häufigkeitsverteilung (58 Messwerte in 10 Klassen, Klassenbreite  $\Delta x = 4$ , relative Häufigkeit = Säulenhöhe  $f(x) \times$  Klassenbreite  $\Delta x$ ) – Beispiel ohne Berücksichtigung eines oberen Grenzwertes

passung der Wahrscheinlichkeitsverteilung im Bereich der kleinen Messwerte an. Große Messwerte der Betondeckung sind im Hinblick auf den Korrosionsschutz der Bewehrung unbedenklich. Sind sie jedoch zu groß, so dass sie der Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht entsprechen, können sie die Auswertung im Bereich der kleinen Messwerte und damit im Bezug auf die Mindestbetondeckung ungerechtfertigt verfälschen. Daher kommt es darauf an, diejenigen der in der Mischverteilung enthaltenen Normalverteilungen auszusondern, deren Erwartungswerte zu groß sind und dadurch eine zu breite Mischverteilung oder sogar eine zweigipflige Mischverteilung verursachen.

Um eine Grenze zur Aussonderung zu großer Messwerte entwickeln zu können, werden mit Gl. (4) zunächst die Quantile berechnet:

$$x(5\%) = \frac{r}{19^{1/k}}, \quad x(95\%) = r \cdot 19^{1/k}$$

$$x(2,5\%) = \frac{r}{39^{1/k}}, \quad x(97,5\%) = r \cdot 39^{1/k}$$

$$x(1\%) = \frac{r}{99^{1/k}}, \quad x(99\%) = r \cdot 99^{1/k}$$

Daraus lässt sich jeweils das Verhältnis der oberen und der unteren Quantile zum Lageparameter  $r$  ableiten:

$$\frac{x(95\%) - r}{r - x(5\%)} = 19^{1/k} \tag{21}$$

$$\frac{x(97,5\%) - r}{r - x(2,5\%)} = 39^{1/k} \tag{22}$$

$$\frac{x(99\%) - r}{r - x(1\%)} = 99^{1/k} \tag{23}$$

Für unterschiedliche Formparameter  $k$  zeigen sich die in Tab. 4 angegebenen Verhältniswerte.

Bei denjenigen Messreihen der Betondeckung, die eine gute Anpassung an die Neville-Verteilung aufweisen, gilt für das Verhältnis der Abweichungen des oberen und des unteren Quantils zum Median zumeist

$$\frac{x(\{1 - \alpha\}\%) - \bar{x}_M}{\bar{x}_M - x(\alpha\%)} \approx 1,5 \tag{24}$$

Bezeichnet man in Gl. (24)  $x(\{1 - \alpha\}\%)$  als  $x_{OG}$  und  $x(\alpha\%)$  als  $x_{min}$ , ergibt sich durch Umstellung als Entscheidungshilfe zur Aussonderung von Messwerten für den quantitativen Nachweis der Betondeckung die *Messwertobergrenze*  $x_{OG}$ . Sie liegt um den 1,5-fachen Betrag des Abstandes zwischen dem Median  $\bar{x}_M$  und dem kleinsten Messwert  $x_{min}$  oberhalb des Medians:

$$x_{OG} = \bar{x}_M + 1,5 \cdot (\bar{x}_M - x_{min}) = 2,5 \cdot \bar{x}_M - 1,5 \cdot x_{min} \tag{25}$$

Tab. 4: Verhältniswerte der Gl. (21) bis Gl. (23)

$k$	$19^{1/k}$	$39^{1/k}$	$99^{1/k}$
1,8	5,1	7,7	12,8
1,9	4,7	6,9	11,2
2,0	4,4	6,2	9,9
2,5	3,2	4,3	6,3
3,0	2,7	3,4	4,6
4,0	2,1	2,5	3,2
5,0	1,8	2,1	2,5
6,0	1,6	1,8	2,2
7,0	1,5	1,7	1,9
8,0	1,4	1,6	1,8
9,0	1,4	1,5	1,7
10,0	1,3	1,4	1,6
12,0	1,3	1,4	1,5
15,0	1,2	1,3	1,4
20,0	1,2	1,2	1,3

Alle Messwerte, die diesen oberen Grenzwert  $x_{OG}$  übersteigen, werden ausgesondert, und der quantitative Nachweis wird mit der reduzierten Messwertreihe geführt. Dadurch verbessert sich die Anpassung der Neville-Verteilung an die verbliebenen Messwerte.

Diese im DBV-Merkblatt »Betondeckung und Bewehrung« im Nachtrag zu Kap. A7.3 festgelegte Messwertobergrenze  $x_{OG}$  passt sich flexibel der Datensituation an. Falls sich nur wenige Daten im oberen Datenbereich befinden, wird durch die Aussonderung dieser »Ausreißer« der im dichten Datenbereich liegende Median nur unmerklich beeinflusst. Sind die Daten aber insgesamt breiter gestreut, betrifft dies auch den mittleren Datenbereich, so dass der Median einen entsprechend größeren Wert annimmt und sich dadurch die Messwertobergrenze  $x_{OG}$  (um den Faktor 1,5 verstärkt) weiter in den oberen Datenbereich hinein verschiebt.

Anstelle dieser generellen Festlegung ließe sich durch eine individuelle Festlegung eine noch bessere Anpassung erreichen, wenn anstelle des Faktors 1,5 in Gl. (24) der mit dem hier berechneten Formparameter  $k = 10,4$  und mit  $\alpha = 5\%$  in Gl. (21) bzw. in Tab. 4 sich ergebende Faktor 1,3 verwendet würde.

Darüber hinaus bedarf es immer der fachlichen Beurteilung der Messdaten durch den messenden Ingenieur, d. h. gegebenenfalls sind weitere Werte auszusondern, die offensichtlich (z. B. Messfehler, Messwerte infolge tief liegender, nicht zur Bewehrung gehörender Einbauteile) nicht zur Grundgesamtheit gehören und aufgrund ihrer Spezifik durch das statistische Obergrenzenkriterium nicht immer identifiziert werden können.

### 5.3 Näherungsverfahren mit Berücksichtigung eines oberen Grenzwertes

Aus den Daten des obigen Beispiels ergibt sich nach Gl. (25) der *obere Grenzwert*

$$x_{OG} = 2,5 \cdot 51 - 1,5 \cdot 37 = 72,0 \text{ mm} . \quad (26)$$

Es liegen vier Messwerte (74 mm, 75 mm, 75 mm, 76 mm) oberhalb dieses Grenzwertes. Sie werden als verfälschend, d.h. Normalverteilungen mit zu großen Erwartungswerten  $\mu_i$  zugehörnd, ausgesondert und der quantitative Nachweis der Betondeckung wird mit der reduzierten Messreihe geführt.

Neue Anzahl der Messwerte  $n = 54$  .

Messwerte  $x_i = c_i$  [mm]:

37, 38, 41, 41, 43, 44, 45, 45, 45, 45, 45, 47, 47, 47, 47, 47, 47, 47, 48, 48, 49, 49, 49, 49, 49, 49, 50, 51, 51, 51, 51, 52, 52, 53, 53, 54, 54, 54, 55, 55, 55, 56, 56, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 61, 63, 66, 69, 71

1. Median  $\bar{x}_M = 50,5$  mm
2. Arithmetisches Mittel  $\bar{x} = 51,33$  mm
3. Standardabweichung  $s = 7,12$  mm
4. Lageparameter  $r = 50,9$  mm
5. Formparameter  $k = 13,0$
6. Zwischenwert  $\rho(x) = \frac{x}{r} = \frac{40}{50,9} = 0,7856$   
(mit  $x = c_{min} = 40$  mm)
7. Verteilungsfunktion  $F_X(x) = 4,2\%$
8. Beurteilung: **Annahme**, da die maximal zulässige Wahrscheinlichkeit  $F_X(c_{min}) \leq 5\%$  nicht überschritten wird.
9. Quantile:  $x(5\%) = 40,6$  mm und  $x(10\%) = 43,0$  mm.  
Beide Quantile liegen oberhalb der Mindestbetondeckung  $c_{min} = 40$  mm, d.h. die Ausführung der Betondeckung wird akzeptiert.

Wie der Vergleich in Tab. 5 zeigt, führen beide Verfahren zu nahezu übereinstimmenden Parameterschätzwerten. Weiterhin führt die bessere Anpassung der Daten durch die Berücksichtigung des oberen Grenzwertes zu der Schlussfolgerung, dass eine Ablehnung der Betondeckung auch beim 5%-Kriterium nicht gerechtfertigt ist.

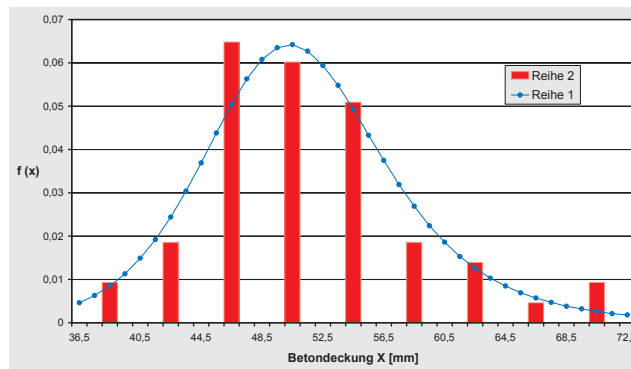


Abb. 8: Reihe 1 = Neville-Dichtefunktion ( $r = 50,9$  mm,  $k = 13,0$ ); Reihe 2 = Häufigkeitsverteilung (54 Messwerte in 9 Klassen, Klassenbreite  $\Delta x = 4$ , relative Häufigkeit = Säulenhöhe  $f(x) \times$  Klassenbreite  $\Delta x$ ) – Beispiel mit Berücksichtigung eines oberen Grenzwertes  $x_{OG} = 72$  mm.

Tab. 5: Vergleich der Näherungsberechnung und der ML-Parameterschätzung der Neville-Verteilung mit Berücksichtigung des oberen Grenzwertes)

	Näherungs- verfahren	ML-Schätzung
Lageparameter	$r = 50,9$ mm	$r = 50,7$ mm
Formparameter	$k = 13,0$	$k = 13,1$
Verteilungsfunktion	$F_X(40 \text{ mm}) = 4,2\%$	$F_X(40 \text{ mm}) = 4,3\%$
Beurteilungskriterium	$F_X(c_{min}) \leq 5\%$	$F_X(c_{min}) \leq 5\%$
Beurteilung	Annahme!	Annahme!

## 6 Schlussfolgerungen

Zur Auswertung rechtsschiefer Messdaten ist die Neville-Verteilung besser geeignet als die symmetrische Normalverteilung. Rechtsschief sind zumeist insbesondere solche Messwerte verteilt, die nicht negativ sein können, wie z. B. Druckfestigkeiten, Betondeckungsmesswerte. Die Wahrscheinlichkeiten und Quantile der Neville-Verteilung lassen sich direkt berechnen, ohne auf Tabellenwerke zurückgreifen zu müssen. Nachteilig ist jedoch, dass die Parameterschätzung nur durch iterative ML-Schätzung erfolgen kann, was entsprechende Rechner- und Softwareausstattung voraussetzt. In der Praxis und vor Ort kann das vorgestellte Näherungsverfahren zur Parameterschätzung mit einfachster Recherausstattung genutzt werden.

Generell kann das hier vorgestellte Praxisverfahren immer dann angewandt werden, wenn sich bei normalverteilten Messdaten infolge des Einflusses von Systematiken Verschiebungen bzw. Maßstabsänderun-



gen im Datenmaterial auswirken, so dass die dadurch entstehenden Teilpopulationen unterschiedlichen Erwartungswerten und Standardabweichungen zuzuordnen sind. Falls die dadurch entstehende Mischverteilung eingipflig und nicht linksschief ist, kann sie durch eine Neville-Verteilung approximiert werden, mit deren Hilfe dann nach dem in Schmidt (2002) angegebenen Dekompositionsverfahren eine Zerlegung der Mischverteilung in die zugrunde liegenden unterschiedlichen Normalverteilungen erfolgen kann. Dadurch lassen sich die einwirkenden Systematiken aufdecken.

### Literatur

- Bramshuber, W., Schmidt, H., Schröder, P., Fingerloos, F.: Messung der Betondeckung – Auswertung und Abnahme. Beton- und Stahlbetonbau. Ernst & Sohn Verlag, Berlin, Heft 3 (2004), S. 169–175.
- Neville, D.J.: Statistical Aspects of Brittle Fracture in homogeneous and inhomogeneous Steel Microstructures. Cambridge, University of Cambridge, Thesis, 1985.
- Neville, D.J.: A New Statistical Distribution Function of Fracture Toughness. In: Proceedings Royal Society London A410 (1987a), S. 421–442.
- Neville, D.J.: The Non-Conservatism of the Weibull Function when applied to the Statistics of Fracture Toughness. In: International Journal of Fracture 34 (1987b), S. 309–315.
- Schmidt, H.: Dekomposition der endlichen Mischung von Normalverteilungen. In: Binnenbruck, B., Fuhlbrügge, H.-J., Schauerte, W. (Hrsg.): Festschrift Univ.-Prof. Dr.-Ing. Bertold Witte zur Emeritierung. Mitteilungen aus den Geodätischen Instituten der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn (2002), Nr. 89.
- Forschungsbericht F 728 (DBV 221): Betondeckung – Planung und Abnahme. Institut für Bauforschung der RWTH Aachen vom 13.05.2002.
- Merkblatt Betondeckung und Bewehrung. Deutscher Beton- und Bau-technik-Verein e. V., Berlin, Fassung Juli 2002.

### Anschrift des Autors

Dr.-Ing. Hubert Schmidt  
Geodätisches Institut der RWTH Aachen  
Templergraben 55, 52062 Aachen  
Tel.: 0241 8095281  
hubert.schmidt@gia.rwth-aachen.de